

①

Forslag til løsning.

Oppgave 1

a) Differensiering av enthalpien gir  $dH = C_p dT$ .

For volumet har en fra ideell gass likning

$V = RT/p$ . Insett i  $Tds = dH - Vdp$  finner en så

$$ds = \frac{1}{T} C_p dT - \frac{R}{p} dp$$

Integrert gir dette

$$S = \underline{C_p \ln T - R \ln p + \text{konst.}}$$

Dvs.  $A = C_p$  og  $B = R$ .

b) Som for jo rops plugg strømmer energien  $H_1 = U_1 + p_1 V_1$  inn mens energien  $H_2 = U_2 + p_2 V_2$  strømmer ut av systemet.

Her strømmer i tillegg energien  $Q$  inn i gassen mens den befinner seg i systemet. Energi balansen blir følgende

$$\begin{aligned} H_1 + Q &= H_2 \\ C_p T_1 + Q &= C_p T_2 \\ Q &= \underline{C_p (T_2 - T_1)} \end{aligned}$$

c) Entropien  $S_1 = C_p \ln T_1 - R \ln p_1 + \text{konst}$  ②  
strømmer inn i systemet mens  $S_2 = C_p \ln T_2 - R \ln p_2 + \text{konst}$   
strømmer ut. I tillegg kommer entropien  $Q/T_1$   
ved varmeoverføring. Ved reversibel prosess er da

$$S_1 + \frac{Q}{T_1} = S_2$$

$$C_p \ln T_1 - R \ln p_1 + \text{konst} + \frac{Q}{T_1} = C_p \ln T_2 - R \ln p_2 + \text{konst}$$

Varmemengden  $Q$  kan nå elimineres ved å sette inn uttrykket fra punkt b. En kan så dividere på  $R$  og finner så

$$\alpha \left( \ln \frac{T_1}{T_2} + \frac{T_2 - T_1}{T_1} \right) = \ln \frac{p_1}{p_2}$$

der  $\alpha = C_p / R$ . Ved å ta eksponensialfunksjonen av dette finner en så

$$p_1 = p_2 \left[ \frac{T_1}{T_2} \exp\left(\frac{T_2 - T_1}{T_1}\right) \right]^\alpha$$

Numerisk finner en

$$\begin{aligned} p_1 &= 1,00 \text{ atm} \left[ \frac{293}{258} \exp\left(\frac{258-293}{293}\right) \right]^{3,5} \\ &= 1,00 \text{ atm} (1,1356 \cdot 0,8874)^{3,5} = \underline{1,028 \text{ atm}} \end{aligned}$$

(3)

Oppgave 2

a) Fra  $G = U - TS + pV$  finner en først  
 $dB = dU - TdS - SdT + p dV + Vdp$

Dette benyttes så til å eliminere  $dU$  i den  
 termodynamiske identitet

$$TdS = dU + p dV$$

som så gir

$$dB = -SdT + Vdp$$

Av dette finner en først

$$\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p = -S \text{ og } \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T = V$$

Ved å derivere 2 ganger finner en så

$$\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right) = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)$$

$$\text{eller } \underline{\underline{-\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p}}$$

Når en erstatter  $U$  med  $H = U + pV$  i  
 den termodynamiske identitet finnes

$$dH = dU + p dV + V dp$$

som innsett gir

$$TdS = dH - Vdp$$

Fra denne ligningen følger så

$$T \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T - V$$

(4)

Ved å benytte Maxwellrelasjonene følger  
 dermed

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T = V + T \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = \underline{\underline{V - T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p}}$$

b) For Joule-Thompson koeffisienten finner vi

$$\mu_{JT} = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H = \frac{-T}{\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial p}{\partial H}\right)_T} = \frac{-1}{C_p} \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T$$

Her har vi først benyttet  $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_T \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_T \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_x = -1$ .

Videre er  $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z^{-1} = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z$  benyttet, og tilslutt  
 er spesifikk varme ved konstant trykk

$$C_p = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_p = T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p$$

Ved å sette inn resultatet fra punkt a) følger

$$\text{så } \underline{\underline{\mu_{JT} = \frac{1}{C_p} \left[ T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p - V \right]}}$$

c) Differensiering av tilstandsligningen gir

$$0 = dp = \left(\frac{R}{V} + \frac{dB}{dT} \frac{1}{V^2}\right) dT - \left(\frac{RT}{V^2} + 2\frac{B}{V^3}\right) dV$$

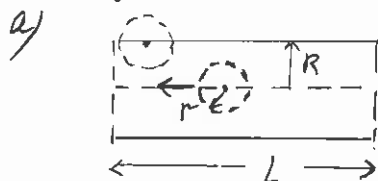
$$T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = V \left(R + \frac{dB}{dT} \frac{1}{V}\right) / \left(R + 2\frac{B}{TV}\right)$$

$$\text{og følgelig } \mu_{JT} = \frac{1}{C_p} \left( T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p - V \right)$$

$$= \frac{1}{C_p} V \left( R + \frac{dB}{dT} \frac{1}{TV} - R - 2\frac{B}{TV} \right) / \left( R + 2\frac{B}{TV} \right) = \frac{1}{C_p} \left( \frac{dB}{dT} - \frac{2B}{T} \right) / \left( R + 2\frac{B}{TV} \right)$$

$$\xrightarrow{V \rightarrow \infty} \frac{1}{C_p} \frac{1}{R} \left( \frac{dB}{dT} - \frac{2B}{T} \right)$$

### Oppgave 3.



En partikkel som beveger seg vil kolliderer med partikler som ligger

innenfor en radius  $R = 2r$  når den selv beveger seg langs sylinderaksen. Volum av sylinder med radius  $R$  og lengde  $L$  blir så

$$V_s = \pi R^2 L = 4\pi r^2 L$$

Med tetthet  $N/V$  blir antall partikler innenfor denne  $N_s = \frac{N}{V} V_s = \frac{N}{V} 4\pi r^2 L$

Midlere fri veilengde blir dermed

$$\lambda = \frac{L}{N_s} = \frac{V}{4\pi r^2 N}$$

Med  $N = n \cdot N_A$  finner en så

$$\lambda = \frac{V}{4\pi r^2 n N_A} = \frac{3,0 \text{ m}^3}{4\pi (0,15 \cdot 10^{-9})^2 \text{ m}^2 \cdot 2,0 \cdot 6,02 \cdot 10^{23}} = 8,8 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

b) Arealet på endeflatene av sylindren (ring av bredde  $b$ )  $A = 2\pi R b$

Med varmestromtetthet  $j_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} \rightarrow j = -k \frac{T - T_0}{L}$ , blir varmestrommen langs sylindren

⑤

$$\dot{Q} = j A = k \frac{T - T_0}{L} A = \frac{2\pi R b k (T - T_0)}{L}$$

$$= \frac{2\pi \cdot 1,8 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot 0,50 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot 46 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} \cdot 50 \text{ K}}{4,0 \cdot 10^{-2} \text{ m}} = 3,25 \text{ W}$$

c) Energien (eller varmemengden) i gilet indre av termosen er  $U = C \Delta T + \text{konst}$  slik at

$$\dot{Q} = - \frac{dU}{dt} = - C \Delta \dot{T}$$

Dette gir differensiallikningen

$$C \Delta \dot{T} = - \frac{2\pi R b k}{L} \Delta T$$

Med  $\Delta T = A \exp(-\alpha t)$  blir  $\Delta \dot{T} = -\alpha \Delta T$ . Ved innsetning blir følgende

$$C \alpha = \frac{2\pi R b k}{L}$$

$$\alpha = \frac{2\pi R b k}{L C}$$

Temperaturen er redusert til halvparten av sin startverdi når

$$e^{-\alpha \tau} = \frac{1}{2}$$

$$-\alpha \tau = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$$

$$\tau = \frac{\ln 2}{\alpha} = \frac{(\ln 2) L C}{2\pi R b k} = \frac{\ln 2 \cdot 4 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot 2,9 \text{ kJ}}{2\pi \cdot 1,8 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot 46 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}}} = 3,1 \cdot 10^4 \text{ s} = 8,6 \text{ timer}$$

⑥