

①

Forslag til løsning.

Oppgave 1

a) For å bestemme T_1 trenger en sammenheng mellom trykk og temperatur langs en adiabat. For ideell gass har en $pV^\gamma = \text{konst.}$ Ved å eliminere V

$$\text{via } pV = RT \text{ finner en}$$

$$pV^\gamma = p \left(\frac{RT}{p} \right)^\gamma = p^{1-\gamma} T^\gamma R^\gamma = \text{konst.}$$

$$T p^{-\sigma} = \text{konst.}$$

$$\text{der } \sigma = \frac{\gamma-1}{\gamma} = \frac{C_p - C_v}{C_p} = \frac{R}{C_p}.$$

Av dette finner en så

$$T_1 p_0^{-\sigma} = T_0 p_1^{-\sigma}$$

$$T_1 = T_0 \left(\frac{p_0}{p_1} \right)^\sigma \quad (\sigma = \frac{\gamma-1}{\gamma} = \frac{2}{7})$$

og tilsvarende

$$T_2 p_1^{-\sigma} = T_0 p_0^{-\sigma}$$

$$T_2 = T_0 \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^\sigma \quad (\text{dvs. } T_1 T_2 = T_0^2)$$

b) Ved den adiabatisk ekspansjonen tilføres ikke varme mens oppvarmingen mellom temperaturene T_1 og T_0 skjer ved konstant trykk. Oppført varme blir derfor

$$Q = C_p (T_0 - T_1). \quad (C_p = \frac{R}{\sigma} = \frac{7}{5} R)$$

Siden gassen er ideell er indre energi uavhengig av volumet slik at

$$\Delta U = 0. \quad ②$$

Energibevarelse etter 1. hovedsetning betyr at $Q = \Delta U + W_1$. Med denne prosessen i to trinn er $\Delta U = 0$. Følgelig

$$W_1 = Q = C_p (T_0 - T_1).$$

c) Det utvendige trykket vil gjøre arbeidet

$$W_0 = p_0 (V_1 - V_0) = p_0 \left(\frac{RT_0}{p_1} - \frac{RT_0}{p_0} \right) = RT_0 \left(\frac{p_0}{p_1} - 1 \right).$$

Nettoarbeid ved ekspansjonen

$$W_{\text{in}} = W_1 + W_0 = C_p (T_0 - T_1) + RT_0 \left(\frac{p_0}{p_1} - 1 \right) =$$

$$R \left[\frac{\gamma}{\gamma-1} (T_0 - T_1) + T_0 \left(\frac{p_0}{p_1} - 1 \right) \right] = 8,314 \left[\frac{7}{2} (293 - 240) + 293 \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \right] \text{ J/mol} = \underline{\underline{324 \text{ J/mol}}}.$$

$$\text{Endring av entropi: } \Delta S = C_p (\ln T_0 - \ln T_1) = C_p \ln \left(\frac{T_0}{T_1} \right).$$

$$\text{Endring av volum: } \Delta V = V_0 - V_1 = \frac{RT_0}{p_0} - \frac{RT_0}{p_1} = \frac{R}{p_0} (T_0 - T_1).$$

$$\text{Endring av indre energi: } \Delta U = C_v (T_0 - T_1).$$

Maksimalt arbeid blir dermed

$$\begin{aligned} W_{\text{max}} &= T_0 \Delta S - \Delta U - p_0 \Delta V = C_p T_0 \ln \left(\frac{T_0}{T_1} \right) - C_v (T_0 - T_1) \\ &\quad - R (T_0 - T_1) = C_p T_0 \ln \frac{T_0}{T_1} - (T_0 - T_1) R = R \frac{\gamma}{\gamma-1} \left(T_0 \ln \left(\frac{T_0}{T_1} \right) - (T_0 - T_1) \right) \\ &= 8,314 \cdot \frac{7}{2} \left[293 \ln \frac{293}{240} - (293 - 240) \right] \text{ J/mol} = \underline{\underline{159 \text{ J/mol}}}. \end{aligned}$$

[$W_{\text{in}} + W_{\text{max}}$ er like arbeidet langs isoterme $T = T_0$ minus W_0 dersom trykket $T_1 = T_0 (p_0/p_1)^\sigma = 240,358 \text{ K}$ brukes.]

Oppgave 2.

③

- a) ΔS er forskjellen i entropi mellom de 2 fasene i likevekt mens ΔV er forskjellen i volum.

T uttrykkes for p er K en konstant. Med konstant fordampingsvarme L finner en ved derivering

$$\frac{dp}{dT} = \frac{L}{RT^2} K \exp\left(-\frac{L}{RT}\right) = \frac{Lp}{RT^2} = \frac{L}{TV} \approx \frac{\Delta S}{\Delta V}$$

når likningen for ideell gass $RT = pV$ benyttes. Siden faseoverganger skjer ved konstant temperatur er tilført varme $L = Q = T\Delta S$. For damp ved lav tetthet kan volum av væske eller fast fase negliseres slik at gassvolum $V \approx \Delta V$.

- b) Siden fordampingsvarmen for is og vann er forskjellige må temperaturer over og under frysepunktet betraktes separat. En får da følgende likninger

$$p_1 = K_i \exp\left(-\frac{L_i}{RT_1}\right)$$

$$p_0 = K_i \exp\left(-\frac{L_i}{RT_0}\right)$$

$$p_0 = K_v \exp\left(-\frac{L_v}{RT_0}\right)$$

$$p_2 = K_v \exp\left(-\frac{L_v}{RT_2}\right)$$

Her $L_v = 45,0$ kJ/mol fordampingsvarmen for vann mens $L_i = (45,0 + 6,0)$ kJ/mol = 51,0 kJ/mol er fordampings- eller sublimasjonsvarmen for is

Ved å ta forholdet mellom 1. og 2. likning og mellom 3. og 4. likning og så multiplisere sammen finner en

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{p_1}{p_0} \frac{p_0}{p_2} = \exp\left[-\frac{L_i}{R}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_0}\right) + \frac{L_v}{R}\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_0}\right)\right]$$

$$= \exp\left[-\frac{51 \cdot 10^3}{8,314}\left(\frac{1}{263} - \frac{1}{273}\right) + \frac{45 \cdot 10^3}{8,314}\left(\frac{1}{293} - \frac{1}{273}\right)\right] = 0,11.$$

- c) Ved differensiering finner en

$$dp = \frac{R}{V-b} dT + \left(\frac{RT}{(V-b)^2} + \frac{2a}{V^3}\right) dV$$

Dette gir

$$K_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = -\frac{1}{V} \frac{1}{\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T} = \frac{1}{\frac{RTV}{(V-b)^2} - \frac{2a}{V^2}}$$

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{\frac{R}{V-b}}{\frac{RTV}{(V-b)^2} - \frac{2a}{V^2}} \quad (= \frac{R}{V-b} K_T)$$

Oppgave 3.

(5)

a) Siden partiklene bare kommer fra den ene siden er $0 \leq \theta \leq 90^\circ$. Integrering over vinklene gir dermed

$$\int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi \left| \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right|_0^{\pi/2} = \pi.$$

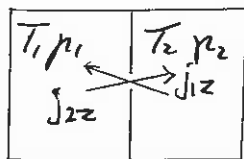
Total partikkelstrøm tetthet blir dermed

$$\begin{aligned} j_z &= \int dj_z = \int v \cos \theta n F(v) d\vec{v} \\ \int v \cos \theta n F(v) v^2 \sin \theta d\theta d\phi dv &= n \int v F(v) \pi v^2 dv \\ &= \frac{1}{4} n \int v F(v) d\vec{v} = \frac{1}{4} n \langle v \rangle. \end{aligned}$$

b) I termisk likevekt er middlere hastighet proporsjonal med $\sqrt{T}$, dvs.

$$\langle v \rangle = K \sqrt{T}$$

der K er konstant.



Ved stationær tilstand strømmer like mange partikler hver vei slik at

$$j_{1z} = j_{2z}$$

$$\frac{1}{4} n_1 \langle v \rangle_1 = \frac{1}{4} n_2 \langle v \rangle_2$$

$$n_1 \sqrt{T_1} = n_2 \sqrt{T_2}$$

Med ideell gass har en $p = \frac{N}{V} kT = n kT$ eller

$$n = \frac{p}{kT}.$$

Innsatt gir dette

$$\frac{p_1}{kT_1} \sqrt{T_1} = \frac{p_2}{kT_2} \sqrt{T_2}$$

$$p_2 = p_1 \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}.$$

c) Overflatearealet til satellitten er

$$A = 4\pi R^2 = 4\pi (0,50 \text{ m})^2 = 3,14 \text{ m}^2$$

Utskåret effekt er derfor

$$\begin{aligned} P &= A \sigma T^4 = 3,14 \text{ m}^2 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/(m}^2 \text{ K}^4) \cdot (283 \text{ K})^4 \\ &= 1140 \text{ W} = 1,14 \text{ kW}. \end{aligned}$$

Utskåret effekt medfører at satellitten avgir varme

$$dQ = C dT = -P dt = -A \sigma T^4 dt$$

Dette gir differensiallikningen

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{A \sigma}{C} T^4.$$

(6)