

Forslag til løsning.

Oppgave 1

①

a) Differensiering av enthalpien gir $dh = C_p dT$.

For volumet har en fra ideell gass likning

$V = RT/p$. Innsatt i $Tds = dh - Vdp$ finner en så

$$ds = \frac{1}{T} C_p dT - \frac{R}{p} dp$$

Integrert gir dette

$$S = \underline{C_p \ln T - R \ln p + \text{konst.}}$$

Dvs. $A = C_p$ og $B = R$.

b) Som for jords plugg strømmer energien $H_1 = U_1 + p_1 V_1$ inn mens energien $H_2 = U_2 + p_2 V_2$ strømmer ut av systemet. Her strømmer i tillegg energien Q inn i gassen mens den befinner seg i systemet. Energi balansen blir følgende

$$H_1 + Q = H_2$$

$$C_p T_1 + Q = C_p T_2$$

$$Q = \underline{C_p (T_2 - T_1)}$$

c) Entropien $S_1 = C_p \ln T_1 - R \ln p_1 + \text{konst}$ ②
strømmer inn i systemet mens $S_2 = C_p \ln T_2 - R \ln p_2 + \text{konst}$
strømmer ut. I tillegg kommer entropien Q/T_1
ved varmeoverføring. Ved reversibel prosess er da

$$S_1 + \frac{Q}{T_1} = S_2$$

$$C_p \ln T_1 - R \ln p_1 + \text{konst} + \frac{Q}{T_1} = C_p \ln T_2 - R \ln p_2 + \text{konst}$$

Varmemengden Q kan nå elimineres ved å sette inn uttrykket fra punkt b. En kan så dividere på R og finner så

$$\alpha \left(\ln \frac{T_1}{T_2} + \frac{T_2 - T_1}{T_1} \right) = \ln \frac{p_1}{p_2}$$

der $\alpha = C_p / R$. Ved å ta eksponensialfunksjonen av dette finner en så

$$p_1 = p_2 \left[\frac{T_1}{T_2} \exp\left(\frac{T_2 - T_1}{T_1}\right) \right]^\alpha$$

Numerisk finner en

$$p_1 = 1,00 \text{ atm} \left[\frac{293}{258} \exp\left(\frac{258 - 293}{293}\right) \right]^{3,5}$$
$$= 1,00 \text{ atm} (1,1356 \cdot 0,8874)^{3,5} = \underline{1,028 \text{ atm}}$$

Oppgave 2.

(3)

a) Tilført varme i et tidsrom dt

$$C_p dT = P dt$$

Dette gir varmekapasiteten

$$C_p = P \frac{dt}{dT} = \frac{P}{\frac{dT}{dt}} = \frac{P}{\dot{T}}:$$

Ved derivering finner en så

$$\dot{T}(t) = T_0 \frac{\gamma}{2(1+\gamma t)^{1/2}}$$

Med $T = T_0 (1+\gamma t)^{1/2}$ kan t enkelt elimineres og en finner

$$\dot{T}(t) = T_0 \frac{\gamma}{2} \frac{T_0}{T}$$

eller

$$C_p = \frac{2P}{\gamma T_0^2} T.$$

b) Med

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV = K dT + \frac{a}{V^2} dV$$

finner en først

$$C_p = \frac{dQ}{dT} = \left(\frac{dU + p dV}{dT}\right)_p = K + \left(\frac{a}{V^2} + p\right) \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p.$$

Tilstandslikningen gir så ved differensiering

(4)

$$dp = \frac{R}{V-b} dT - \left(\frac{RT}{(V-b)^2} - \frac{2a}{V^3}\right) dV$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{\frac{R}{V-b}}{\frac{RT}{(V-b)^2} - \frac{2a}{V^3}}$$

Med $p + a/V^2 = RT/(V-b)$ finner en dermed

$$C_p = K + \frac{\frac{RT}{(V-b)^2}}{\frac{RT}{(V-b)^2} - \frac{2a}{V^3}} = K + \frac{R}{1 - \frac{2a(V-b)^2}{RTV^3}}.$$

c) På kritisk punkt har en horisontal tangent og vendepunkt på isotermer slik at

$$\frac{\partial p}{\partial V} = -\frac{RT}{(V-b)^2} + \frac{2a}{V^3} = 0$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial V^2} = \frac{2RT}{(V-b)^3} - \frac{6a}{V^4} = 0$$

Med $V_c = 3b$ finner en fra den første likningen

$$T_c = T = \frac{2a}{V^3} \frac{(V-b)^2}{R} = \frac{2a}{(3b)^3} \frac{(2b)^2}{R} = \frac{8}{27} \frac{a}{Rb}.$$

[Innsetting i den andre likningen gir samme resultat.]

⑤

Oppgave 3.

a) Med de nye variable finner en

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial \tau} \cdot 1$$

$$+ \frac{\partial T}{\partial z} \left(-\frac{x}{2\sqrt{2Dt}} \right) = \frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{z}{2\tau} \frac{\partial T}{\partial z}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{1}{\sqrt{2Dt}}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sqrt{2Dt}} \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2Dt}} \right)^2 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{2D\tau} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

Følgelig blir differensiallikningen

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{z}{2\tau} \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{D}{2D\tau} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

eller

$$2\tau \frac{\partial T}{\partial \tau} - z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

Der, $a=2$:b) $z=0$ tilsvarer $x=0$ for alle t . $z=\infty$ tilsvarer $t=0$ for alle x .

Grensebetingelsene blir derfor (i følge figur)

$$T(0) = \underline{T_0 + T_1} \quad (= T(t, 0))$$

$$T(\infty) = \underline{T_0} \quad (= T(0, x))$$

⑥

Ved derivering finner en

$$\frac{dT}{dz} = C_1 e^{-z^2/2}$$

$$\frac{d^2 T}{dz^2} = -z C_1 e^{-z^2/2} = -z \frac{dT}{dz}$$

som betyr at differensiallikningen er oppfylt siden T er uavhengig av τ .

c) Fra løsningen og oppgitt integral finner en sammen med grensebetingelsene

$$T(0) = C_2 = \underline{T_0 + T_1}$$

$$T(\infty) = C_1 \int_0^{\infty} e^{-u^2/2} du + C_2 = \frac{1}{2} \sqrt{2\pi} C_1 + C_2 = T_0$$

$$C_1 = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} (T_0 - C_2) = \underline{-\frac{\sqrt{2}}{\pi} T_1}$$

Varmestrømmen inn i veggen blir ($x=0, z=0$)

$$j(t) = -K \frac{\partial T}{\partial x} = -K \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{K}{\sqrt{2Dt}} \frac{\partial T}{\partial z}$$

$$= -\frac{K}{\sqrt{2Dt}} C_1 = \frac{0,80 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}}{(2 \cdot 0,0018 \text{ m}^2/\text{s} \cdot 3\text{h})^{1/2}} \cdot 12\text{K} = \underline{92 \text{ W/m}^2}$$