

①

Forslag til løsning.

Oppgave 1.

- a) Ved å eliminere p i adiabatlikningen $pV^\gamma = \text{konst}$ finner en $RTV^\gamma/V = \text{konst}$ eller $TV^{\gamma-1} = \text{konst}$.
For adiabaten fram til T_2 finner en da følgende

$$T_0 V_0^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$$

$$V_2 = \underline{\underline{V_0 (T_0/T_2)^{1/(\gamma-1)}}}$$

Adiabaten mellom T_0 og T_1 gir tilsvarende

$$T_0 V_1^{\gamma-1} = T_1 V_2^{\gamma-1}$$

$$V_1 = V_2 \left(\frac{T_1}{T_0} \right)^{1/(\gamma-1)} = \underline{\underline{V_0 \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{1/(\gamma-1)}}}$$

- b) langs adiabatene tilføres ikke varme, dvs.

$$Q_{12} = Q_{20} = \underline{\underline{0.}}$$

Langs isokoren varmes det opp ved konstant trykk, dvs

$$Q_{22} = C_V(T_2 - T_1) = \underline{\underline{\frac{R}{\gamma-1}(T_2 - T_1)}}$$

da $C_p - C_V = (\gamma-1)C_V = R$ eller $C_V = \underline{\underline{\frac{R}{\gamma-1}}}$.

Langs isoterme er tilført varme lik utført

②

arbeid da indre energi er uendret for ideell gass ved konstant temperatur. Når resultatet fra punkt a) benyttes blir følgende arbeid

$$Q_{01} = \int_{V_0}^{V_1} p dV = RT_0 \int_{V_0}^{V_1} \frac{dV}{V} = RT_0 \ln \left(\frac{V_1}{V_0} \right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{RT_0}{\gamma-1} \ln \left(\frac{T_1}{T_2} \right)}} \quad (< 0)$$

- c) Utført arbeid W er like netto tilført varme for en hel syklus ($\Delta U = 0$).

$$W = Q_{22} + Q_{01}$$

Virkningsgraden blir dermed

$$\eta = \frac{W}{Q_{22}} = 1 + \frac{Q_{01}}{Q_{22}} = \underline{\underline{1 - \frac{T_0 \ln(T_2/T_1)}{T_2 - T_1}}}$$

For ideell gass avhenger entalprien kun av temperaturen. En har at $H = U + pV = C_V T + RT = C_p T$. Følgelig

$$\Delta H = \underline{\underline{C_p(T_1 - T_0)}}.$$

Langs isoterme tilføres varme ved konstant temperatur. Med $dQ = Tds$ blir da

$$\Delta S = \frac{Q_{01}}{T_0} = \underline{\underline{\frac{R}{\gamma-1} \ln \left(\frac{T_1}{T_2} \right)}}.$$

[En kan alternativt integrere mellom T_2 og T_1 , $\Delta S = \int_{T_2}^{T_1} \frac{C_V dT}{T} = C_V \ln(T_1/T_2)$, $ds=0$ langs adiabatene.]

Oppgave 2

③

a) Med henholdsvis N_+ og N_- spinn med og mot magnetfeltet blir antall konfigurasjoner

$$W = \frac{N!}{N_+! N_-!} \quad \text{der } N = N_+ + N_-$$

Med $N_m = N_+ - N_-$ følger så

$$N_+ = \frac{1}{2}(1+m)N \quad \text{og} \quad N_- = \frac{1}{2}(1-m)N$$

Videre med $\ln N! = \ln 2\pi N + N \ln N - N$
 $\rightarrow N \ln N$, $N \rightarrow \infty$, blir følgende entropien

$$\begin{aligned} S &= k \ln W = k (\ln N! - \ln N_+! - \ln N_-!) = \\ &= k [N \ln N - (N_+ \ln N_+ + N_- \ln N_-)] = k \left[-N \ln \frac{N_+}{N} - N \ln \frac{N_-}{N} \right] \\ &= Nk \left[-\frac{1}{2}(1+m) \ln \left(\frac{1}{2}(1+m) \right) - \frac{1}{2}(1-m) \ln \left(\frac{1}{2}(1-m) \right) \right] \\ &= Nk \left[\ln 2 - \frac{1}{2}(1+m) \ln(1+m) - \frac{1}{2}(1-m) \ln(1-m) \right] \end{aligned}$$

Dvs: $A = \ln 2$ og $B = C = \frac{1}{2}$.

b) Differensiering gir

$$dF = dU - SdT - TdS$$

slik at ved innsettning for $dU = SdT + Nd\mu$ finner en

$$dF = -SdT + Nd\mu$$

Likningen for μ kan nå bestemmes fra F ved derivering. Med $F = U - ST = -ST$

og likningen for dF finner en for $\mu = \mu(T, m)$ ④

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{N} \left(\frac{\partial F}{\partial m} \right)_T = - \frac{T}{N} \left(\frac{\partial S}{\partial m} \right)_T = \\ &= -kT \frac{d}{dm} \left[\ln 2 - \frac{1}{2}(1+m) \ln(1+m) - \frac{1}{2}(1-m) \ln(1-m) \right] = \\ &= -kT \left[-\frac{1}{2} \ln(1+m) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln(1-m) + \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{2} kT \ln \left(\frac{1+m}{1-m} \right) \end{aligned}$$

c) Entropien er gitt ved ($C = \text{konst}$)

$$S = \int dS = \int \frac{dQ}{T} = \int \frac{C}{T} dT = C \ln T + \text{konst.}$$

Energibevarelse bestemmer sluttemperaturen T_S

$$\begin{aligned} 2CT_S &= CT_a + CT_b \\ T_S &= \frac{1}{2}(T_a + T_b) \end{aligned}$$

Endring i entropi blir følgende

$$\begin{aligned} \Delta S &= S_S - S_a - S_b = 2C \ln T_S - C \ln T_a - C \ln T_b \\ &= C \ln \frac{(T_a + T_b)^2}{4T_a T_b} \quad \left[= C \ln \left(1 + \frac{(T_a - T_b)^2}{4T_a T_b} \right) > 0 \right] \end{aligned}$$

På grunn prosessen er reversibel vil entropien være uendret. Sluttemperaturen T_0 blir da

$$\begin{aligned} 0 = \Delta S &= C [2 \ln T_0 - \ln T_a - \ln T_b] = C \ln \left(\frac{T_0^2}{T_a T_b} \right) \\ T_0 &= \sqrt{T_a T_b} \end{aligned}$$

Oppgave 3.

⑤

a) Med lineært temperaturprofil gjennom veggene vil de i middel måtte oppvarmes

$$\Delta T = \frac{1}{2}(20 - (-10))^\circ\text{C} = \underline{15^\circ\text{C}}, \text{ dvs. } \Delta T = \underline{15\text{K}}.$$

Med volum av veggene $V = AL$ blir varme-
kapasiteten til veggene

$$C = c AL = 1350 \text{ kJ/m}^2\text{K} \cdot 85 \text{ m}^2 \cdot 0,20 \text{ m} = \underline{2,3 \cdot 10^4 \text{ kJ/K}}.$$

Oppvarmingsbehovet blir da

$$Q = C \cdot \Delta T,$$

som gir tid for oppvarming

$$t = \frac{Q}{P_0} = \frac{2,3 \cdot 10^4 \text{ kJ/K} \cdot 15 \text{ K}}{4,0 \text{ kJ/s}} = \underline{8,6 \cdot 10^4 \text{ s}}$$

$$\approx \underline{24 \text{ timer}} = \underline{1 \text{ døgn}}.$$

b) Varmestruetthet gjennom veggene
ved stationære forhold

$$j = -\kappa \frac{dT}{dx} = \kappa \frac{\Delta T_t}{L}$$

der

$$\Delta T_t = (20 - (-10))^\circ\text{C} = \underline{30^\circ\text{C}}, \text{ dvs. } \underline{30\text{K}}.$$

Effekten fra oven P er så lik total varmestruetthet ⑥

$$P = jA = \kappa A \frac{\Delta T_t}{L} \\ = 0,14 \text{ W/(m}\cdot\text{K)} \cdot 85 \text{ m}^2 \cdot \frac{30\text{K}}{0,20\text{m}} \approx \underline{1,8 \text{ kW}}.$$

c) Med ideell gass er partikkeltettheten

$$n = \frac{p}{kT}$$

slik at partikkelstrømmen blir

$$J = Aj = -AD \nabla n = AD \frac{n_2 - n_1}{L} \\ = \frac{AD}{LkT} (p_2 - p_1).$$

Masse pr. vannmolekyl

$$m = \frac{M}{N_A}, \text{ der } M = 18 \text{ g/mol.}$$

Massestrømmen blir følgende ($N_A k = R$, $N = 1/\text{m}$)

$$J_m = mJ = \frac{MAD}{LRT} (p_2 - p_1) \\ = \frac{18 \text{ g/mol} \cdot 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot 3 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}}{0,1 \text{ m} \cdot 8,314 \text{ J/(mol}\cdot\text{K)} \cdot 293 \text{ K}} (2,2 - 1,2) \cdot 10^3 \text{ N/m}^2 \\ = \underline{3,3 \cdot 10^{-7} \text{ g/s}} = \underline{1,2 \cdot 10^{-3} \text{ g/time}} = \underline{0,20 \text{ g/uke}}.$$