

Forslag til løsning.

Oppgave 1

a) Differensiering av indre energi gir

$$dU = C_v dT + \frac{a}{V^2} dV$$

som innsett i den termodynamiske identitet for

$$TdS = dU + p dV = C_v dT + \frac{a}{V^2} dV + \left(\frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2} \right) dV$$

$$= C_v dT + RT \frac{dV}{V-b}$$

$$dS = C_v \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V-b}$$

Integrert gir dette

$$S = C_v \ln T + R \ln(V-b) + \text{konst.}$$

$$\text{Der. } A = C_v, \quad B = R \text{ og } V_0 = b.$$

b) Arbeidet langs isotermer er

$$W_1 = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \left(\frac{RT_1}{V-b} - \frac{a}{V^2} \right) dV$$

$$= \left[RT_1 \ln(V-b) + \frac{a}{V} \right]_{V_1}^{V_2} = RT_1 \ln \frac{V_2-b}{V_1-b} + a \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right).$$

Langs adiabatene er entropien uendret. ($TdS = dQ = 0$

for reversibel prosess). Dette betyr at

$$C_v \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2-b}{V_1-b} = C_v \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2-b}{V_1-b} + R \ln \left(\frac{V_1-b}{V_2-b} \right)^{\frac{R}{C_v}}$$

$$\ln \frac{T_2}{T_1} = \ln \frac{T_1}{T_2} + \frac{R}{C_v} [\ln(V_1-b) - \ln(V_2-b)] = \ln \frac{T_1}{T_2} + \ln \left(\frac{V_1-b}{V_2-b} \right)^{\frac{R}{C_v}}.$$

②

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_1-b}{V_2-b} \right)^{\frac{R}{C_v}}.$$

Arbeidet langs adiabatene tas fra indre energi da tilført varme er lik 0, dvs. $0 = Q = \Delta U + W$.
Tilført arbeid er følgende

$$W_2 = -\Delta U = -(U_2 - U_1) = C_v(T_1 - T_2) - a \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right).$$

c) Virkningsgraden til kjøleknappa

$$\varepsilon = \frac{Q_1}{W} = \frac{8,5 \text{ MJ}}{5,4 \text{ MJ}} = \underline{\underline{1,57}}.$$

Arbeidet varme til omgivelsene

$$Q_2 = 8,5 \text{ MJ} + 5,4 \text{ MJ} = \underline{\underline{13,9 \text{ MJ}}}.$$

Total endring av entropi er gitt ved

$$\Delta S = \frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_1}{T_1} = \left(\frac{13,9}{298} - \frac{8,5}{253} \right) \frac{\text{MJ}}{\text{K}} = \underline{\underline{130 \text{ kJ/K}}}.$$

Det termisk minste arbeidet er bestemt av at total entropiendring er lik 0. Da må en ha

$$\Delta S = \frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_1}{T_1} = 0$$

$$Q_2 = \frac{T_2}{T_1} Q_1 = \frac{298}{253} \cdot 8,5 \text{ MJ} = \underline{\underline{10,1 \text{ MJ}}}.$$

Minste mulig arbeid tilført blir følgende

$$W_{\min} = Q_2 - Q_1 = (10,1 - 8,5) \text{ MJ} = \underline{\underline{1,57 \text{ MJ}}}.$$

[Bruk av Carnot virkningsgrad gir det samme, $Q_2 = (T_2/T_1) Q_1$.]

④

$m_2 = m_1$. Dette betyr at

$$\frac{h_2}{T_2} = \frac{h_1}{T_1}$$

slik at resulterende temperatur blir

$$T_2 = \frac{h_2}{h_1} T_1$$

✓ Effekten som kan tas ut blir

$$P = \Delta p \cdot Q = (\Delta p_0 - \Delta p_e) Q = (\Delta p_0 - \lambda Q) Q$$

Konstanten λ bestemmes ved at $\Delta p_0 = \lambda Q_0$,

$$\text{dvs. } \lambda = \frac{\Delta p_0}{Q_0}$$

$$\text{slik at } P = \Delta p_0 \left(1 - \frac{Q}{Q_0}\right) Q = \Delta p_0 Q_0 \left(1 - \frac{Q}{Q_0}\right) \frac{Q}{Q_0}$$

Maksimal effekt bestemmes ved derivering

$$0 = \frac{dP}{dQ} = \Delta p_0 \left(1 - \frac{2Q}{Q_0}\right)$$

$$Q = \frac{1}{2} Q_0$$

Maksimal effekt blir

$$P_m = \Delta p_0 Q_0 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \Delta p_0 Q_0$$

$$= \frac{1}{4} 23 \cdot 10^3 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot 0,025 \text{ m}^3/\text{s} = 7,28 \cdot 10^4 \text{ W} \approx \underline{\underline{73 \text{ kW}}}$$

③

Oppgave 2.

a) Med henholdsvis N_+ og N_- spin med og mot magnetfeltet blir antall konfigurasjoner

$$W = \frac{N!}{N_+! N_-!} \quad \text{der } N = N_+ + N_-$$

Med $N_m = N_+ - N_-$ følger ss

$$N_+ = \frac{1}{2}(1+m)N \quad \text{og} \quad N_- = \frac{1}{2}(1-m)N$$

Videre med $\ln N! = \ln \left(\frac{1}{2} N\right) + N \ln N - N$

→ $N \ln N - N$, $N \rightarrow \infty$, blir følgende entropien

$$S = k \ln W = k \left(\ln N! - \ln N_+! - \ln N_-! \right)$$

$$= k \left[N \ln N - N - \left(N_+ \ln N_+ - N_+ \right) - \left(N_- \ln N_- - N_- \right) \right] = k \left[-N_+ \ln \frac{N_+}{N} \right.$$

$$\left. - N_- \ln \frac{N_-}{N} \right] = N k \left[-\frac{1}{2}(1+m) \ln \left(\frac{1}{2}(1+m) \right) - \frac{1}{2}(1-m) \ln \left(\frac{1}{2}(1-m) \right) \right]$$

$$= N k \left[\ln 2 - \frac{1}{2}(1+m) \ln(1+m) - \frac{1}{2}(1-m) \ln(1-m) \right]$$

$$\text{Pos. } A = \ln 2 \quad \text{og} \quad B = C = \frac{1}{2}$$

↳ Tilstandslikningen blir

$$h = - \frac{1}{N} \frac{dS}{dm}$$

$$-kT \frac{d}{dm} \left[\ln 2 - \frac{1}{2}(1+m) \ln(1+m) - \frac{1}{2}(1-m) \ln(1-m) \right]$$

$$= -kT \left[-\frac{1}{2} \ln(1+m) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln(1-m) + \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{2} kT \ln \left(\frac{1+m}{1-m} \right)$$

Her avhenger entropien $S = S(\mu, m)$ kun av m .

Når en først setter på magnetfeltet h isotermt vil m øke (da $T = \text{konst}$). Når så magnetfeltet slås av igjen med $S = \text{konst}$ vil m være uendret slik at

Oppgave 3

- a) En kan først sette $a = \frac{m}{2kT}$. Ved å bruke oppgitt uttrykk blir da midlere kvadratiske hastighet

$$\langle v^2 \rangle = \int v^2 F(v) dv = 4\pi \int_0^\infty v^2 \left(\frac{a}{\pi} \right)^{3/2} e^{-av^2} v^2 dv$$

$$= 4\pi \left(\frac{a}{\pi} \right)^{3/2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{a^2} = \underline{\underline{3 \frac{kT}{m}}}$$

[Alternativt: $F(v) = g(v_x)g(v_y)g(v_z)$, $g(v_x) = \left(\frac{a}{\pi} \right)^{1/2} e^{-av_x^2}$

$$\langle v_x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 g(v_x) dv_x = \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 \frac{a}{\pi} e^{-av_x^2} dv_x = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 e^{-av_x^2} dv_x = \frac{kT}{m}$$

der. $\langle v^2 \rangle = 3 \langle v_x^2 \rangle = \underline{\underline{3 \frac{kT}{m}}}$

- b) For likeformede problemer ved varmeledning er sammenhengen mellom tidler og avstander gitt ved

$$t_2 = a^2 t_1 \quad \text{og} \quad r_2 = a r_1$$

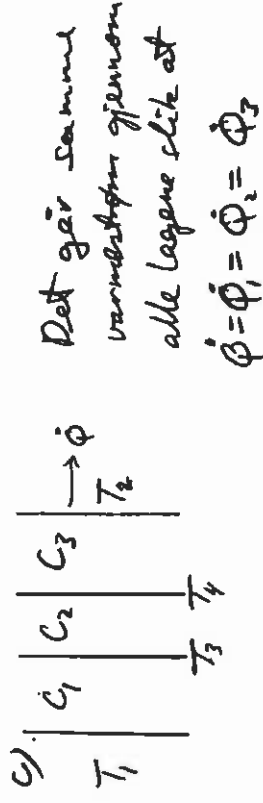
Massen er proporsjonal med volumet ($n \propto r^3$) slik at skalafaktoren a blir

$$a = \frac{r_2}{r_1} = \left(\frac{m_2}{m_1} \right)^{1/3} = \left(\frac{2.5 m_1}{m_1} \right)^{1/3} = \underline{\underline{1.357}}$$

Tiden for avkjøling av massen m_2 blir dermed

$$t_2 = a^2 t_1 = (1.357)^2 \cdot 110 \text{ min} = \underline{\underline{203 \text{ min}}} \approx \underline{\underline{3 \frac{1}{3} \text{ time}}}$$

6



For temperaturforskjellene har en da

$$\Delta T_1 = T_1 - T_3 = \frac{\dot{Q}_1}{C_1} = \frac{1}{C_1} \dot{Q}$$

$$\Delta T_2 = T_3 - T_4 = \frac{\dot{Q}_2}{C_2} = \frac{1}{C_2} \dot{Q}$$

$$\Delta T_3 = T_4 - T_2 = \frac{\dot{Q}_3}{C_3} = \frac{1}{C_3} \dot{Q}$$

Ved å legge sammen disse likningene får en så

$$T_1 - T_2 = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right) \dot{Q} = \frac{1}{C} \dot{Q}$$

slik at

$$\dot{Q} = \underline{\underline{C(T_1 - T_2)}}$$

der

$$\frac{1}{C} = \underline{\underline{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}}} \quad \text{eller} \quad C = \underline{\underline{\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right)^{-1}}}$$