

EKSAMEN I FY1005 og TFY4165 TERMISK FYSIKK:
LØSNINGSFORSLAG

Mandag 11. august 2014 kl. 0900 - 1300

Oppgave 1. 25 flervalgsoppgaver. (Poeng: $2 \times 25 = 50$)

a) Hvor mange mol ideell gass er det i en kubikkmeter ved atmosfæretrykk (101 kPa) og god og lun romtemperatur (300 K)?

For ideell gass er $pV = nRT$, dvs

$$n = pV/RT = 101 \cdot 10^3 \cdot 1 / (8.314 \cdot 300) \simeq 40.$$

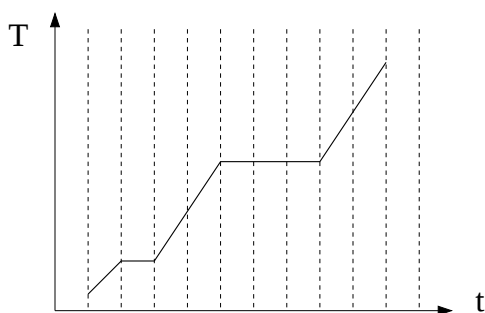
B) 40

b) Hvis du lager et sirkulært hull med diameter 10 cm i en stålplate utendørs i 30 kuldegrader, hva er hullets diameter når platen har akklimatisert seg inne i badstua, der temperaturen er 70 varmegrader? Stål har lineær utvidelseskoeffisient $\alpha = 1.3 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$.

Diameteren øker ved oppvarming fra minus 30 til pluss 70 grader, og den lineære utvidelseskoeffisienten avgjør med hvor mye:

$$d(70) = d(-30) \cdot (1 + 0.000013 \cdot 100) = 10.013 \text{ cm}.$$

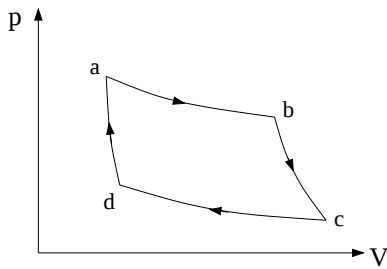
C) 10.013 cm



c) Varmer tilføres et rent stoff i en lukket beholder. Tilført varme pr tidsenhet er konstant. Figuren viser hvordan stoffets temperatur T endrer seg med tiden. Hva er forholdet mellom stoffets fordampningsvarme L_f og stoffets smeltevarme L_s ?

Konstant temperatur ved smelting (1.0 tidsintervall) og ved fordampning (3.0 tidsintervaller) gir $L_f/L_s = 3.0/1.0 = 3.0$.

D) $L_f/L_s = 3.0$



d) Figuren viser en reversibel kretsprosess der arbeidssubstansen er en gass. Hva er netto arbeid som utføres i kretsprosessen?

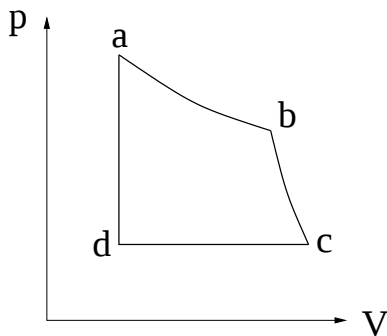
Netto arbeid = omsluttet areal.

B) Arealet omsluttet av kurven abcd.

e) Vedrørende ligningen $Q = \Delta U + W$, hvilken påstand er feil?

Q og W er prosessvariable, U er tilstandsvariabel.

D) Mens W er en prosessvariabel, er både U og Q tilstandsvariable.



f) Figuren viser en reversibel kretsprosess for en ideell gass, bestående av en isotherm (a til b), en adiabat (b til c), en isobar (c til d) og en isokor prosess. Ranger temperaturene T_a , T_b , T_c og T_d i de fire tilstandene (hjørnene) merket hhv a, b, c og d.

Adiabat brattere enn isotherm, dvs $T_c < T_b$. Videre er T_d åpenbart minst.

A) $T_d < T_c < T_b = T_a$

g) Hvis $S(T, V) = C_V \ln(T/T_0) + Nk_B \ln(V/V_0) + S_0$ for en ideell gass med N molekyler, hva blir $S(T, p)$ for den samme gassen? (Her er $S_0 = S(T_0, V_0)$, og $p_0 V_0 = Nk_B T_0$.)

For ideell gass er $C_p - C_V = Nk_B$. Vi setter inn $V = Nk_B T/p$ og $V_0 = Nk_B T_0/p_0$, dvs $V/V_0 = (T/p)/(T_0/p_0)$:

$$\begin{aligned} S &= (C_p - Nk_B) \ln(T/T_0) + Nk_B \ln((T/p)/(T_0/p_0)) + S_0 \\ &= C_p \ln(T/T_0) - Nk_B \ln(T/T_0) + Nk_B \ln(T/T_0) - Nk_B \ln(p/p_0) + S_0 \\ &= C_p \ln(T/T_0) - Nk_B \ln(p/p_0) + S_0 \end{aligned}$$

D) $S(T, p) = C_p \ln(T/T_0) - Nk_B \ln(p/p_0) + S_0$

h) Hvis 1 liter vann med temperatur T_0 og varmekapasitet C (som er uavhengig av T , og slik at $C_p = C_V = C$) bringes i termisk kontakt med et varmereservoar med temperatur T_1 , hva er endringen i vannets entropi når vannet har nådd samme temperatur som varmereservoaret? (Se bort fra volumendringer.)

Vi neglisjerer endringer i volumet og bruker $dS = CdT/T$:

$$\Delta S_{\text{vann}} = C \int_{T_0}^{T_1} \frac{dT}{T} = C \ln(T_1/T_0).$$

D) $C \ln(T_1/T_0)$

i) Hva blir entropiendringen til varmereservoaret i forrige oppgave?

Varmereservoaret har (uendelig) stor varmekapasitet, slik at temperaturen ikke endres selv om varme fjernes eller tilføres. Varmen som ble tilført vannet i oppgave 33 er $Q = C(T_1 - T_0)$, positiv hvis T_1 er større enn T_0 og vice versa. Dette må da, pga energibevarelse, være varmen som varmereservoaret avgir, ved den konstante temperaturen T_1 . Dermed:

$$\Delta S_{\text{res}} = -Q/T_1 = C(T_0 - T_1)/T_1.$$

A) $C(T_0 - T_1)/T_1$

j) Hva kan du, uten videre, si om den *totale* entropiendringen i prosessen beskrevet i oppgave 33? (Dvs, for vann og reservoar til sammen.)

Proessen som beskrives i oppgave 33 er en naturlig, spontan prosess, som dermed er irreversibel. Da *vet* vi at den totale entropiendringen er *positiv* – 2. hovedsetning. Rett svar er altså

A) Positiv.

k) I et system med N uavhengige partikler er det for hver partikkel to mulige (kvantemekaniske) tilstander, enten energi $-E_0$ eller energi E_0 . Hvor stor er da sannsynligheten for at en gitt partikkel har energi $-E_0$, når systemets temperatur er T ?

I et system med temperatur T og mulige (tillatte) energinivåer E_j ($j = 1, 2, 3, \dots$) er sannsynligheten for at en gitt partikkel har energi E_j lik

$$\pi_j = \frac{1}{Z} e^{-E_j/k_B T},$$

med partisjonsfunksjonen (tilstandssummen)

$$Z = \sum_j e^{-E_j/k_B T},$$

slik at total sannsynlighet blir normert. Med de to tillatte energiverdiene $\pm E_0$ blir

$$Z = e^{E_0/k_B T} + e^{-E_0/k_B T} = 2 \cosh(E_0/k_B T),$$

slik at sannsynligheten for at en gitt partikkel har energi $-E_0$ blir

$$\pi_- = \exp(-(-E_0/k_B T)) / [2 \cosh(E_0/k_B T)],$$

dvs rett svar blir

B) $\exp(E_0/k_B T) / [2 \cosh(E_0/k_B T)]$

l) Hva blir indre energi for systemet i oppgave k? ($U = N\langle E \rangle$.)

Midlere energi pr partikkel er

$$\langle E \rangle = \sum_j E_j \pi_j = \frac{-E_0 \exp(E_0/k_B T) + E_0 \exp(-E_0/k_B T)}{2 \cosh(E_0/k_B T)} = -E_0 \frac{2 \sinh(E_0/k_B T)}{2 \cosh(E_0/k_B T)} = -E_0 \tanh(E_0/k_B T).$$

Med N partikler blir dermed systemets indre energi

$$U = N \cdot \langle E \rangle = -NE_0 \tanh(E_0/k_B T),$$

og rett svar er

D) $-NE_0 \tanh(E_0/k_B T)$

m) Hvis temperaturen i en ideell gass halveres, hvordan endres molekylene rms-hastighet? ($v_{\text{rms}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$)

Partiklenes midlere kinetiske energi, $\langle K \rangle = m\langle v^2 \rangle/2$, er proporsjonal med systemets temperatur T . En halvering av T betyr derfor en halvering av $\langle v^2 \rangle$, dvs v_{rms} reduseres med faktoren $1/\sqrt{2} \simeq 0.7$, en reduksjon på ca 30 prosent.

B) v_{rms} reduseres med ca 30 prosent.

n) Hvis trykket i en ideell gass fordobles samtidig som gassen presses sammen til halvparten så stort volum, hvordan endres v_{rms} ?

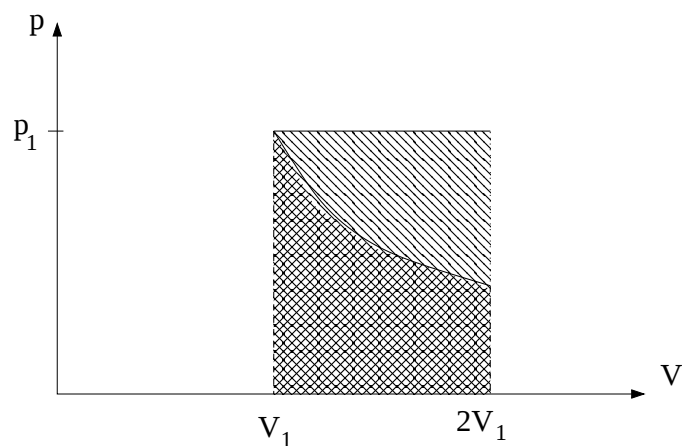
Produktet pV er uendret hvis trykket dobles og volumet halveres. Da er også temperaturen uendret, som igjen betyr at v_{rms} er uendret.

C) v_{rms} blir uendret.

o) En ideell gass utvider seg reversibelt og isotermt fra en tilstand (T_1, p_1) slik at volumet blir dobbelt så stort, $V_1 \rightarrow 2V_1$. Arbeidet på omgivelsene er da W_0 . Dersom den samme gassen i stedet hadde utvidet seg reversibelt ved konstant trykk, fremdeles fra V_1 til $2V_1$, hva kan du da si om arbeidet gjort på omgivelsene, W_1 , i forhold til det isoterme arbeidet W_0 ?

Det isoterme arbeidet W_0 tilsvarer det "dobbeltskraverte" arealet i figuren nedenfor, mens arbeidet W_1 utført ved konstant trykk p_1 tilsvarer hele det skraverte arealet. Vi ser at $W_1 > W_0$, og riktig svar er

C) $W_1 > W_0$



p) Varmemengden $Q_p > 0$ tilføres en ideell gass ved konstant trykk. Gassens indre energi øker da med

Tilførsel av varme ved konstant trykk betyr at gassen utfører et positivt arbeid på omgivelsene (f.eks. hele det skraverte arealet i forrige oppgave). Da blir gassens økning i indre energi mindre enn tilført varme.

A) en energimengde mindre enn Q_p .

q) Luft er med god tilnærmelse en ideell blanding av O_2 - og N_2 -molekyler. Hva kan du si om v_{rms} og midlere kinetiske energi $\langle K \rangle$ for de ulike molekylene? Det oppgis at oksygen er tyngre enn nitrogen.

Siden temperaturen er proporsjonal med molekylens midlere kinetiske energi, må $\langle K \rangle$ være den samme for både oksygen- og nitrogenmolekylene. Oksygen har større molekylmasse (ca 32 u) enn nitrogen (ca 28 u), så nitrogenmolekylene har i gjennomsnitt noe større hastighet enn oksygenmolekylene. (Her er u lik en atomær masseenhed, ca $1.66 \cdot 10^{-27}$ kg.)

B) $v_{\text{rms}}(O_2) < v_{\text{rms}}(N_2)$, $\langle K \rangle_{O_2} = \langle K \rangle_{N_2}$

r) En ideell (reversibel) Carnot-varmepumpe leverer en varmeeffekt på 2.0 kW ved å overføre varme fra utvendig luft ved -10°C til husets varmluftforsyning ved $+30^\circ\text{C}$. Hvor mye elektrisk effekt (arbeid pr tidsenhet) bruker varmepumpa?

Virkningsgraden til Carnot-varmepumpa er

$$\varepsilon_V^c = |Q_2|/|W| = |Q_2|/(|Q_2| - |Q_1|) = T_2/(T_2 - T_1) = 303/40,$$

så den forbruker

$$|W| = |Q_2|/\varepsilon_V^c = 2.0 \cdot 40/303 \simeq 0.26,$$

dvs 0.26 kW elektrisk energi (effekt).

A) 0.26 kW

s) Hvordan ser en Carnot-prosess ut i et (S, T) -diagram?

En Carnot-prosess består av to isotermer og to isentropiske prosesser, dvs med hhv T konstant og S konstant. Dermed et rektangel i et (S, T) -diagram.

B) Et rektangel (med horisontale og vertikale linjer).

t) For toatomige molekyler endres C_V fra $3k_B/2$ til $5k_B/2$ pr partikkel ved en "karakteristisk" (lav!) temperatur T_{rot} . Ranger molekylene H_2 , HCl og Cl_2 med hensyn på verdien av denne karakteristiske temperaturen. (Cl har større masse enn H.)

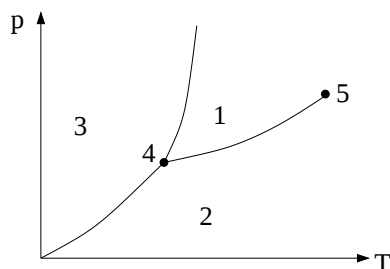
Dreieimpulsen er kvantisert, $L^2 = l(l+1)\hbar^2$, med $l = 0, 1, 2, \dots$ og $\hbar = h/2\pi$ Plancks ("reduerte") konstant. Overgangstemperaturen T_{rot} blir dermed omvendt proporsjonal med molekylets treghetsmoment I , som stiger i rekkefølgen $H_2 - HCl - Cl_2$. Dvs, T_{rot} avtar i denne rekkefølgen. (Omtrentlige verdier for T_{rot} er hhv 88, 15 og 0.4 K for disse tre molekylene.)

B) $H_2 > HCl > Cl_2$

u) Et ideelt "Carnot-kjøleskap" holder konstant temperatur 4°C ("lavtemperaturreservoaret") i et kjellerrom der temperaturen er 19°C ("høytemperaturreservoaret"). Hva er kjøleskapets effektfaktor, dvs forholdet mellom varmen som trekkes ut av kjøleskapet og arbeidet som kjøleskapets motor må utføre? (Tips: For syklisk reversibel prosess er $\Delta S = 0$ og $\Delta U = 0$.)

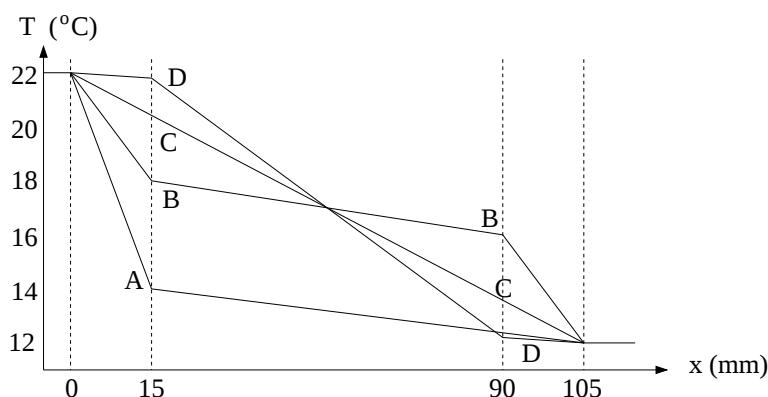
$\varepsilon_K = |Q_1/W| = |Q_1/(Q_1 + Q_2)|$. Vi bruker at $Q_1/T_1 + Q_2/T_2 = 0$, dvs $Q_2 = -Q_1 T_2/T_1$, som innsatt i uttrykket for ε_K gir $\varepsilon_K = |T_1/(T_1 - T_2)| = 277/15 \simeq 18$.

C) Ca 18



v) Figuren viser et fasediagram i (p, T) -planet for et rent stoff. De ulike fasene er angitt (1, 2, 3), sammen med spesielle punkter (4, 5) på koeksistenslinjene. Hvilket svaralternativ angir riktige faser, og punkter ved koeksistens?

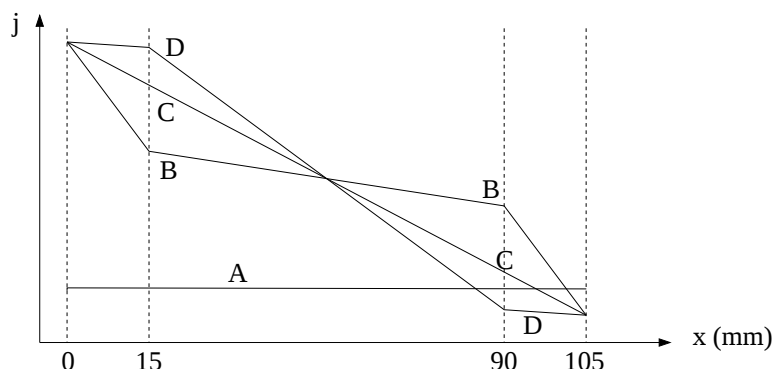
B) 3 = fast stoff, 1 = væske, 2 = gass, 4 = trippelpunkt, 5 = kritisk punkt



w) En vegg mellom ei stue og et soverom har 15 mm tykke gipsplater på begge sider av et 75 mm tykt lag med glassvatt ("glava"). Gipsplater isolerer godt mot *lyd* og hemmer spredning av brann, men isolerer *dårlig* mot varmeledning: $\kappa_{\text{gips}} = 0.25 \text{ W/m K}$, mens $\kappa_{\text{glava}} = 0.035 \text{ W/m K}$. (for $x > 105 \text{ mm}$) hhv 22°C og 12°C ?

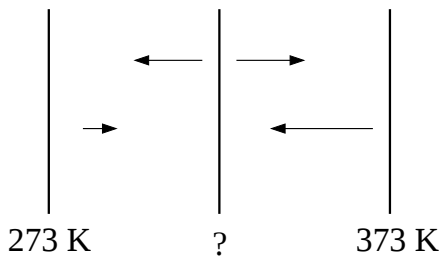
Hvilken kurve viser da korrekt temperaturprofil gjennom veggens ved stasjonære (dvs tidsuavhengige) forhold og stuetemperatur (for $x < 0$) og soveromstemperatur (for $x > 105 \text{ mm}$) hhv 22°C og 12°C ?

Med $0.25/0.035 \simeq 7$ ganger større varmeledningsevne i gips enn i glava har vi ca 7 ganger mindre temperaturendring pr lengdeenhet i gips enn i glava. Kurve D passer bra med dette.



x) Og for samme system som i oppgave 48, hvilken kurve viser korrekt varmestrøm pr tids- og pr flateenhet, j , som funksjon av posisjon x gjennom veggens? (Vilkårlige enheter langs vertikal akse.)

Kurve A er riktig, siden stasjonær varmestrøm innebærer at j er den samme gjennom hele veggens.



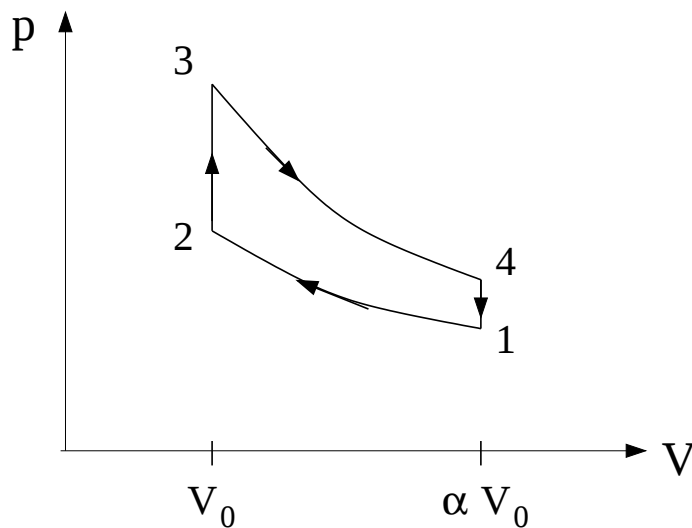
y) To (tilnærmet uendelig) store parallelle metallplater holdes på fast temperatur hhv 273 K og 373 K. (Disse platene kan med andre ord betraktes som to varmereservoarer.) En tredje metallplate settes inn mellom disse, som vist i figuren. Alle platene kan betraktes som perfekt svarte legemer som emitterer elektromagnetisk stråling ("varmestråling") i begge retninger. Det er vakuum i rommet mellom platene. Når stasjonære (dvs tidsuavhengige) forhold er etablert, hva er temperaturen på den midterste platen?

Ved stasjonære forhold er varmestrøm inn mot og ut fra midtplaten like store:

$$\sigma(T_1^4 + T_3^4) = 2\sigma T_2^4 \Rightarrow T_2 = ((T_1^4 + T_3^4)/2)^{1/4} = 334 \text{ K.}$$

B) 334 K

Oppgave 2. Kretsprosess. (Poeng: 5+5+5+5)



Figuren viser en kvalitativ skisse av den såkalte Otto-prosessen, en reversibel idealisering av prosessen i en bensinmotor, bestående av to adiabatener og to isokorer. Arbeidssubstansen er en fleratomig ideell gass. Faktoren $\alpha > 1$ angir det såkalte kompresjonsforholdet.

a. Begrunn hvorfor adiabatkonstanten $\gamma = C_p/C_V$ har verdien $4/3$ for en fleratomig gass. (Anta at molekylene ikke er lineære, og at molekylene indre vibrasjonsfrihetsgrader ikke er eksitert ved de aktuelle temperaturer.)

Ikkelineære molekyler har 3 rotasjonsfrihetsgrader og 3 translasjonsfrihetsgrader når vibrasjonsfrihetsgradene er "frosset ut", dermed indre energi $6 \cdot kT/2 = 3kT$ pr partikkel, og dermed varmekapasitet $C_V = \partial U/\partial T = 3k$ pr partikkel. Siden $C_p - C_V = k$ (pr partikkel; oppgitt i oppgaveteksten), følger det at $C_p = 4k$ og $\gamma = 4/3$.

b. Utled adiabatligningen for en ideell gass i TV -planet, $TV^{\gamma-1} = \text{konstant}$. Tips: Anta konstante (dvs temperaturuavhengige) varmekapasiteter, samt " $p dV$ -arbeid". Ta utgangspunkt i 1. hovedsetning. Du kan få bruk for å erstatte Nk med $C_p - C_V$.

1. lov med $\dot{d}Q = 0$ gir $0 = dU + pdV = C_V dT + pdV$. Bruker ideell gass tilstandsligning samt oppgitt sammenheng $Nk = C_p - C_V$:

$$pdV = (NkT/V)dV = (C_p - C_V)TdV/V = C_V(\gamma - 1)TdV/V.$$

Dermed har vi

$$dT/T = -(\gamma - 1)dV/V,$$

som etter integrasjon på begge sider gir resultatet

$$T \cdot V^{\gamma-1} = \text{konstant}.$$

c. Vis at Otto-prosessens virkningsgrad er $\eta = 1 - \alpha^{1-\gamma}$.

For å bestemme virkningsgraden trenger vi uttrykk for tilført varme Q_1 ved lav-volum-isokoren V_0 og avgitt varme Q_2 ved høy-volum-isokoren αV_0 . Siden prosessene er isokore, dvs konstant volum, blir de to varmemengdene

$$Q_1 = C_V(T_3 - T_2)$$

og

$$Q_2 = C_V(T_1 - T_4).$$

Her er T_3 og T_2 hhv høy og lav temperatur for isokoren med volum V_0 , mens T_4 og T_1 er høy og lav temperatur for isokoren med volum αV_0 . Adiabatligningen $TV^{\gamma-1} = \text{konst}$ knytter temperaturene sammen:

$$T_1(\alpha V_0)^{\gamma-1} = T_2 V_0^{\gamma-1}$$

og

$$T_4(\alpha V_0)^{\gamma-1} = T_3 V_0^{\gamma-1}.$$

Virkningsgraden er

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = \frac{T_3 - T_2 + T_1 - T_4}{T_3 - T_2}.$$

Her kan (f.eks) T_2 og T_3 elimineres via adiabatligningene ovenfor, og vi finner

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{(T_4 - T_1)(\alpha^{\gamma-1} - 1)}{(T_4 - T_1)\alpha^{\gamma-1}} \\ &= 1 - \alpha^{1-\gamma}. \end{aligned}$$

d. Man vil unngå antenning av gassblandingen i løpet av den adiabatiske kompresjonen ($1 \rightarrow 2$ i figuren), som starter ved "normale betingelser", dvs atmosfæretrykk og romtemperatur ($p_1 = 1 \text{ atm}$, $T_1 = 293 \text{ K}$). Hvor stort kompresjonsforhold $\alpha_{\max}$ kan vi da tillate, dersom gassblandingen antennes ved 400 grader celsius?

Vi kan maksimalt tillate at $T_2 = 400 \text{ grader celsius} = 673 \text{ K}$. Fra punkt **c** har vi sammenhengen

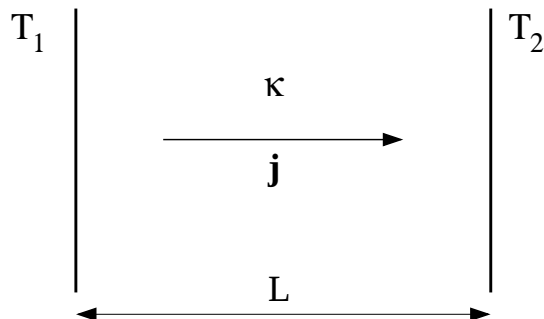
$$T_1(\alpha V_0)^{\gamma-1} = T_2 V_0^{\gamma-1},$$

som gir

$$\alpha = (T_2/T_1)^{\frac{1}{\gamma-1}}.$$

Med tallverdiene $T_2 = 673 \text{ K}$, $T_1 = 293 \text{ K}$ og $\gamma = 4/3$ finner vi $\alpha_{\max} = 12.1$.

Oppgave 3. Varmetransport. (Poeng: 5+5+5)



En fortynnet gass med enatomige molekyler fyller rommet mellom to store parallelle plater (som f.eks et dobbeltvindu). Atomene har masse m og kan betraktes som harde kuler med radius a . Anta at atomenes midlere fri veilengde λ er liten sammenlignet med avstanden L mellom platene. Da er gassens varmeledningsevne uavhengig av partikkeltettheten $n = N/V$, og gitt ved $\kappa = \beta\sqrt{T}$, med $\beta = k\sqrt{k}/(4\pi a^2\sqrt{\pi m})$.

a. Anta stasjonære forhold, med konstant temperatur T_1 på venstre plate og konstant temperatur $T_2 < T_1$ på høyre plate, og bestem varmestrømmen pr flateenhet $j_\kappa = \dot{Q}_\kappa/A$ i den fortynnede gassen. (Tips: Bruk Fouriers lov og uttrykk svaret ved koeffisienten β samt de gitte temperaturene T_1 og T_2 og plateavstanden L .)

Fouriers lov:

$$j_\kappa = -\kappa dT/dx = -\beta\sqrt{T}dT/dx,$$

dvs

$$j_\kappa dx = -\beta\sqrt{T}dT.$$

Integrasjon på begge sider gir

$$j_\kappa = \frac{2\beta}{3L} (T_1^{3/2} - T_2^{3/2}).$$

b. Varmeroverføring pga stråling vil komme i tillegg til varmeledningsbidraget beregnet i punkt **a**. Bestem netto varmestrøm pr flateenhet, $j_{\text{rad}} = \dot{Q}_{\text{rad}}/A$, pga stråling mellom platene. Du kan anta at begge plater er perfekt svarte legemer, med konstante temperaturer T_1 og T_2 som i punkt **a**.

Stefan-Boltzmanns strålingslov gir

$$j_{\text{rad}} = \sigma (T_1^4 - T_2^4).$$

c. Anta at gassen er argon, med $m = 40u$ og $a = 0.71 \text{ \AA}$, at plateavstanden er $L = 1.5 \text{ cm}$, og at $T_1 = 20^\circ\text{C}$ (innetemperatur) og $T_2 = -20^\circ\text{C}$ (utetemperatur, vinter). Bestem de to bidragene til varmestrømmen pr flateenhet, hhv j_κ og j_{rad} . Bruk enheten W/m^2 .

Med oppgitte tallverdier er

$$\beta = (1.38 \cdot 10^{-23})^{3/2} / (4\pi \cdot (0.71 \cdot 10^{-10})^2 \cdot \sqrt{\pi \cdot 40 \cdot 1.67 \cdot 10^{-27}}) = 1.767 \cdot 10^{-3},$$

i SI-enheter. Dermed er

$$j_\kappa = \frac{2 \cdot 1.767 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 0.015} \cdot (293^{3/2} - 253^{3/2}) = 78,$$

i SI-enheten W/m^2 . Stråling:

$$j_{\text{rad}} = 5.67 \cdot 10^{-8} \cdot (293^4 - 253^4) = 186,$$

dvs W/m^2 .

Oppgave 4. Gibbs fri energi. (Poeng: 5)

Naturlige variable for Gibbs fri energi G er T og p . Vis dette ved å uttrykke dG ved dT og dp , og bestem dermed $(\partial G/\partial T)_p$ og $(\partial G/\partial p)_T$. Utled også Maxwell-relasjonen $(\partial V/\partial T)_p = -(\partial S/\partial p)_T$. (Tips: Benytt den termodynamiske identitet, med konstant partikkeltall N .)

Vi har

$$G = U + pV - TS$$

og

$$TdS = dU + pdV.$$

Dermed er

$$dG = dU + pdV + Vdp - TdS - SdT = Vdp - SdT,$$

som viser at p og T er de to naturlige variable for G , og samtidig at $(\partial G/\partial T)_p = -S$ og $(\partial G/\partial p)_T = V$. Partiellderivasjon av disse to siste sammenhengene på begge sider, med hensyn på henholdsvis p og T , gir umiddelbart den oppgitte Maxwell-relasjonen, siden rekkefølgen på derivasjon i de to andrederiverte av G ikke spiller noen rolle.