

Eksemen Termisk fysikk

05.12.2015

09.00 - 13.00

Løsningsforslag

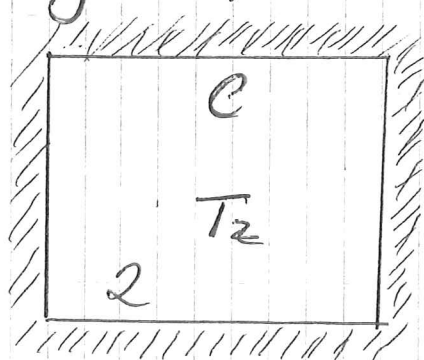
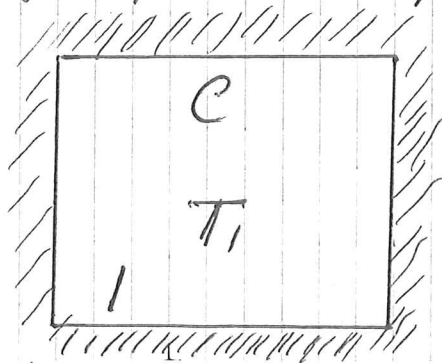
Oppgave 1

a) U : Middelvardi av systemets kinetiske og potensielle energi.

$H = U + pV$: Middelvardi av systemets kinetiske og potensielle energi, pluss energi som skal til for å "rydde plass" til systemet i volumet V ved spesifisert trykk.

$F = U - TS$: Den delen av et systems mekaniske energi som er tilgjengelig for å gjøre nyttig arbeid ved spesifisert volum og temperatur.

$G = H - TS$: Samme som F , men ved spesifisert trykk og temperatur.



b) Varmer kan flyte fra varmt til kaldt område, og kan benyttes til å gjøre arbeid.

Termodynamikkens 1. lov

$$Q_d = \Delta U_d + W$$

Q_d : Totallt tilført varme
for organismene. Hvis $Q_d = 0$

W : Arbeid som gjøres.

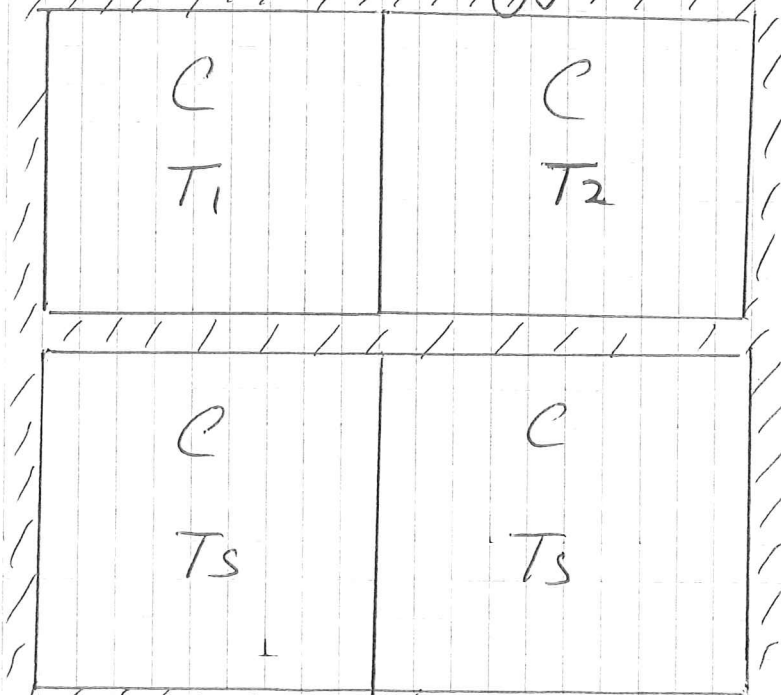
Termodynamikkens 2. lov

$$\Delta S_d \geq 0$$

$$U_d = U_1 + U_2$$

$$S_d = S_1 + S_2$$

c) Se først på tilfellet der samme
flyt er reversibelt mellom 1 og 2
uten et arbeid gjøres, $W=0$



Hvis:

$T_s = S_{luft}$
temperatur

med reversibel
utjevning
av temperaturer.

$$\Delta S > 0$$

$$\Delta U_d = 0$$

Reversibelt

$$(Q_d = 0, W = 0)$$

$$\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2$$

$$= C (T_s - T_1) + C (T_s - T_2)$$

$$= C (2T_s - T_1 - T_2) = 0$$

Numrisk.

$$T_s = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

$$T_s = 312.5 \text{ K}$$

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2$$

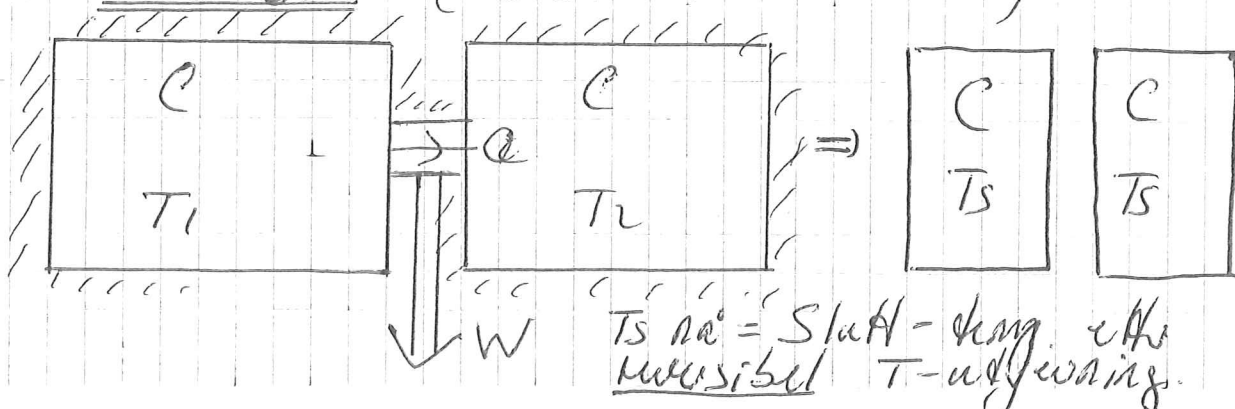
$$= C \int_{T_1}^{T_s} \frac{dT}{T} + C \int_{T_2}^{T_s} \frac{dT}{T}$$

$$= C \ln \left(\frac{T_s^2}{T_1 T_2} \right) = C \ln \left(\frac{(T_1 + T_2)^2}{4 T_1 T_2} \right)$$

$$= C \ln \left(1 + \frac{(T_1 - T_2)^2}{4 T_1 T_2} \right) > 0$$

ii)

La nå varme som flyte
fra det varme reservoar til det
kolde brukes til å utføre et
arbeid $W \neq 0$. Det maksimale
arbeidet oppnås når varmekonverteren
er reversibel (Carnot-maskin)



Reversibilitet $\Rightarrow \Delta S = 0$

④

1. lov: $Q_d = 0 = \Delta U_d + W_{\max}$

$$W_{\max} = -\Delta U_d$$

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2$$

$$= C \ln \left(\frac{T_S^2}{T_1 T_2} \right) = 0$$

$$\underline{T_S = \sqrt{T_1 T_2}}$$

Numerisk: $T_S = \sqrt{350 \cdot 275} = \underline{\underline{310 \text{ K}}}$

Dette er mindre enn T_S vi fant under pkt i).

Vi kunne sett dette gjennom:

Kall T_S i pkt i) T_S^I

Kall T_S i pkt ii) T_S^K

$$T_S^I - T_S^K = \frac{T_1 + T_2}{2} - \sqrt{T_1 T_2}$$

$$= \frac{(\sqrt{T_1})^2 + (\sqrt{T_2})^2 - 2\sqrt{T_1} \cdot \sqrt{T_2}}{2}$$

$$= \frac{1}{2} (\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2})^2 > 0$$

c) Det maksimale arbeidet $W_{\max}$:

$$\begin{aligned}
 W_{\max} &= -\Delta U_{\text{tot}} = -(\Delta U_1 + \Delta U_2) \\
 &= + [C(T_1 - T_S) + C(T_2 - T_S)] \\
 &= + C [T_1 + T_2 - 2T_S] \\
 &= + C (T_1 + T_2 - 2\sqrt{T_1 T_2}) \\
 &= \underline{\underline{C (\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2})^2}}
 \end{aligned}$$

Numerisk:

$$\begin{aligned}
 W_{\max} &= 4.8 \cdot 10^7 (\sqrt{1350} - \sqrt{1275})^2 \\
 &= 4.8 \cdot 10^7 (18.71 - 16.58)^2 \\
 &= 4.8 \cdot 10^7 \cdot 4.52 \\
 &= \underline{\underline{21.7 \cdot 10^7 \text{ J}}}
 \end{aligned}$$

Se forøvrig P.C.H. Kp. 5.3

d) Effekt = $\frac{W_{\max}}{\Delta t}$, der Δt er

tiden det tar å gjennomføre den reversible kompresjons-ordningen. En reversibel prosess tar uendelig lang tid, $\Delta t \rightarrow \infty$. Effekt = 0

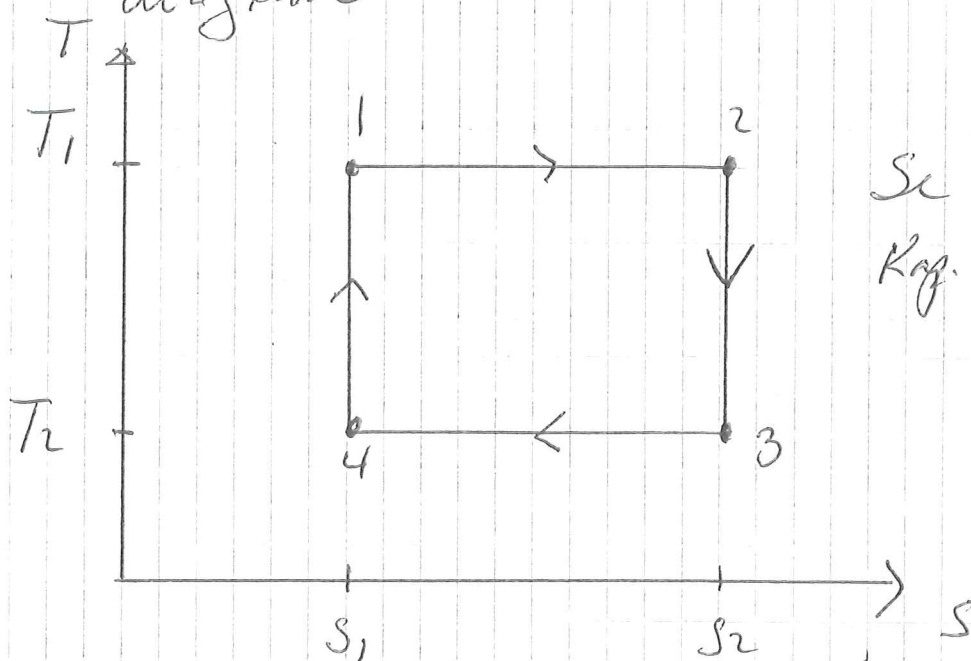
Oppgave 2

6

$$TdS = dH + p dV \cdot M$$

a)

Carnot-prosessen i (T, S) diagram



Se P.C.H
Kap. 4.3

b)

Virkningsgrad $\eta = \frac{W}{Q_1}$

Q_1 : Tilført varme (Til)
 Prosess 1 $\rightarrow$ 2 (T_1)

$$W = Q_1 - |Q_2|$$

Q_2 : Avgitt varme (Til)
 Prosess 3 $\rightarrow$ 4 (T_2)

$$dQ_1 = T_1 dS \Rightarrow Q_1 = T_1 \int_{S_1}^{S_2} dS$$

$$Q_1 = T_1 (S_2 - S_1)$$

$$dQ_2 = T_2 dS \Rightarrow Q_2 = T_2 \int_{S_2}^{S_1} dS$$

$$Q_2 = T_2 (S_1 - S_2)$$

$$Q_1 = T_1 (S_2 - S_1) > 0$$

(7)

$$Q_2 = -|Q_2| = -T_2 (S_2 - S_1) < 0$$

$$\eta = \frac{T_1 (S_2 - S_1) - T_2 (S_2 - S_1)}{T_1 (S_2 - S_1)}$$

$$= 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

Helt uafh. af arbejdsstans,
 kun afhængig af temperaturer til
 reservoarer.

Kommentar: All information om
 hva slags arbejdsstans vi
 bruger, ligger kodet i

$$\Delta S \equiv S_1 - S_2$$

Denne størrelse karakteriserer ud i η ,
 og giver til dette et af
 $dQ = T dS$, dvs. processen er
reversibel.

c)

$$TdS = dH + \mu_0 M d\mathcal{H} \quad (8)$$

(Gauss-system: $TdS = dH + p dV = dH - V dp$)
 $p \rightarrow -\mu_0 \mathcal{H}, \quad V \rightarrow M$

Offs. H $\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T = -T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p + V \Rightarrow$

$$-\frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\partial H}{\partial \mathcal{H}}\right)_T = -T \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_\mathcal{H} + M$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \mathcal{H}}\right)_T + \mu_0 M = \mu_0 T \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_\mathcal{H} \quad (*)$$

$$TdS = dH + \mu_0 M d\mathcal{H}$$

$$= \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_\mathcal{H} dT + \left(\left(\frac{\partial H}{\partial \mathcal{H}}\right)_T + \mu_0 M\right) d\mathcal{H}$$

$$TdS = C_\mathcal{H} dT + \mu_0 T \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_\mathcal{H} d\mathcal{H} \quad (\text{in es. H})$$

$$M = C \frac{\mathcal{H}}{T} \Rightarrow \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_\mathcal{H} = -C \frac{\mathcal{H}}{T^2}$$

$$TdS = C_\mathcal{H} dT - \mu_0 C \frac{\mathcal{H}}{T} d\mathcal{H}$$

Adiab. et: $dQ = TdS = 0$

$$C_\mathcal{H} T dT - \mu_0 C \mathcal{H} d\mathcal{H} = 0$$

$$\underline{C_\mathcal{H} T^2 - \mu_0 C \mathcal{H}^2 = \text{constant.}}$$

Før i finne $\odot$, s. 8, kunne vi
 i stedet også direkte utbr bruk av
 offisielle formel og substitusjon
 $P \rightarrow -\mu_0 H$, $V \rightarrow H$, slik: (9)

$$T dS = dH + \mu_0 M dH \quad (\times \times)$$

$$= \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_H dT + \left[\left(\frac{\partial H}{\partial H} \right)_T + \mu_0 M \right] dH$$

Vi trenger i formelle uttrykket i klamme-
 parantes, og gjør dette ved den samme
 metoden som gir 4.18 i P.C.H

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_H dT + \left(\frac{\partial S}{\partial H} \right)_T dH \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_H = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_H; \quad \left(\frac{\partial S}{\partial H} \right)_T = \frac{1}{T} \left[\left(\frac{\partial H}{\partial H} \right)_T + \mu_0 M \right]$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial T \partial H} = \frac{\partial^2 S}{\partial H \partial T} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{T} \frac{\partial^2 H}{\partial H \partial T} = \frac{1}{T} \left[\frac{\partial^2 H}{\partial T \partial H} + \mu_0 \left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)_H \right]$$

$$- \frac{1}{T^2} \left[\left(\frac{\partial H}{\partial H} \right)_T + \mu_0 M \right] \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial H} \right)_T + \mu_0 M = \mu_0 T \left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)_H$$

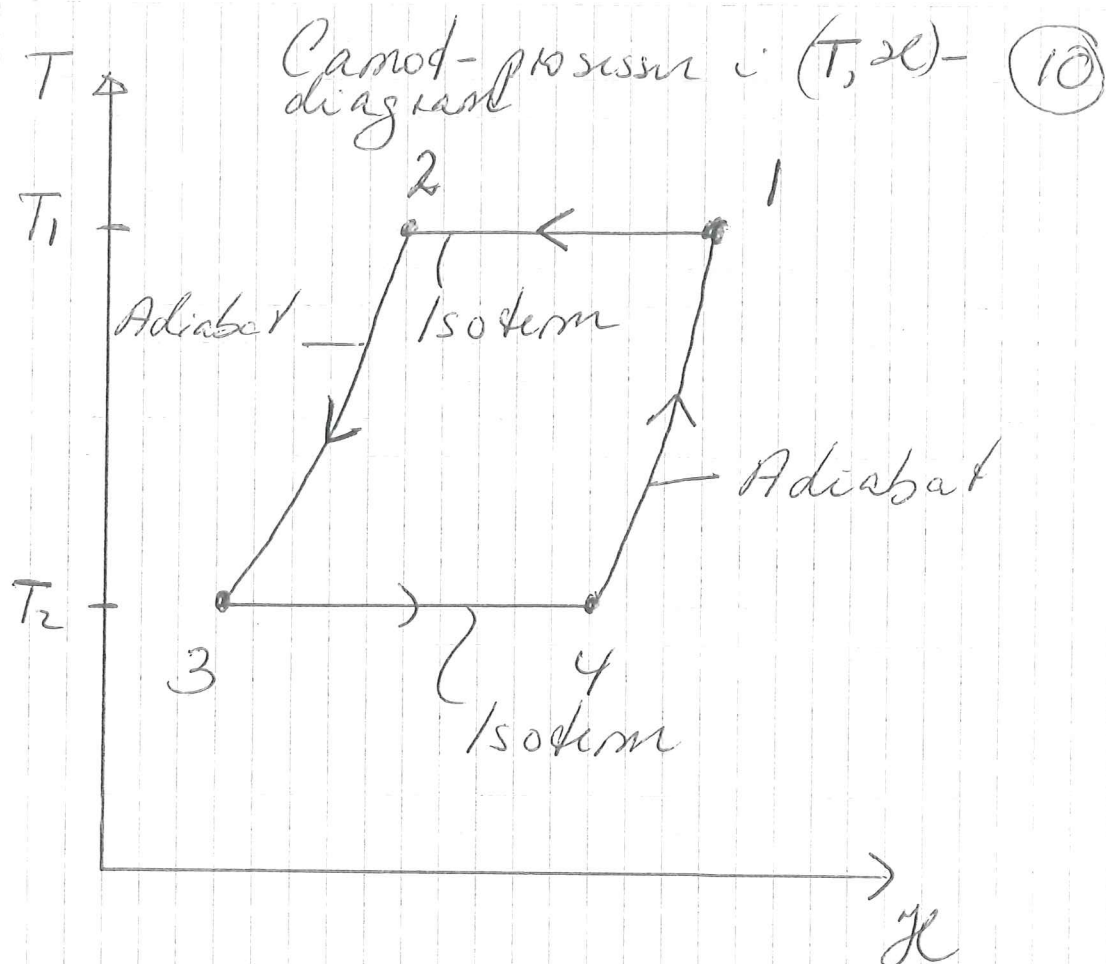
som er ligning $\odot$, s. 8

Innsatt i $(\times \times)$ gir dette

$$T dS = C_H dT + \mu_0 T \left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)_H dH$$

$$T dS = C_H dT - \mu_0 C \frac{H}{T} dH \quad (\text{idell magnet})$$

d)



$$T dS = C_v dT - p_0 C \frac{\mathcal{H}}{T} d\mathcal{H}$$

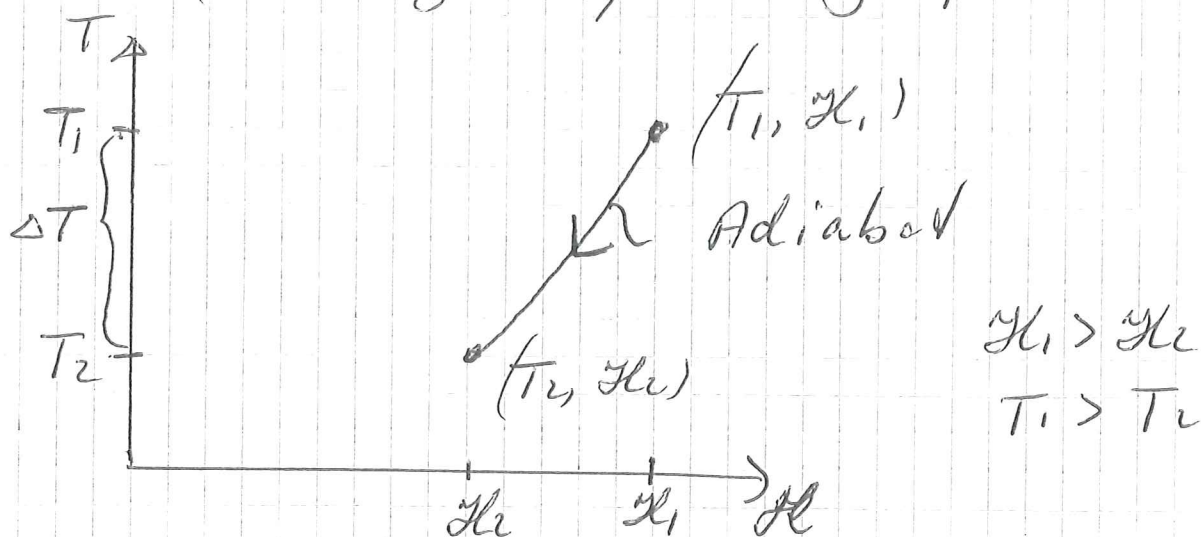
1 $\rightarrow$ 2: Varme tilførs ($T dS > 0$)
isothermt ved $T_1 \Rightarrow d\mathcal{H} < 0$

2 $\rightarrow$ 3: Adiabotisk prosess

3 $\rightarrow$ 4: Varme fjernelse ($T dS < 0$)
isothermt ved $T_2 \Rightarrow d\mathcal{H} > 0$

4 $\rightarrow$ 1: Adiabotisk prosess

e) Vi ser nå på adiabatisk kjøling mellom to kompartmer (T_1, T_2) og to ytre magnetfelt $(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ (11)



Langs adiabatene har vi
 $C_{\mathcal{H}} T^2 \text{ p\AA } \mathcal{H}^2 = \text{konstant}$

$$C_{\mathcal{H}} T_1^2 - \mu_0 C \mathcal{H}_1^2 = C_{\mathcal{H}} T_2^2 - \mu_0 C \mathcal{H}_2^2$$

$$C_{\mathcal{H}} (T_1^2 - T_2^2) = \mu_0 C (\mathcal{H}_1^2 - \mathcal{H}_2^2)$$

$$\text{V.s.: } C_{\mathcal{H}} (T_1^2 - T_2^2) = C_{\mathcal{H}} (T_1 - T_2)(T_1 + T_2)$$

$$= C_{\mathcal{H}} \Delta T \cdot (T_1 + T_1 - \Delta T)$$

$$= C_{\mathcal{H}} \Delta T \cdot (2T_1 - \Delta T) \approx 2T_1 C_{\mathcal{H}} \Delta T$$

Siste tilnærming gjelder for $\Delta T \ll T_1$

$$\Rightarrow \Delta T = \frac{\mu_0 C}{2T_1 C_{\mathcal{H}}} (\mathcal{H}_1^2 - \mathcal{H}_2^2)$$

Kommentar: Vi får mest effektiv kjøling for et magnet med stor varme led. Vi bli magnetisert av et magnetfelt, samtidig som det har like varmeledning.

Oppgave 3.

(12)

Midlere fart:

$$\langle v \rangle = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} dv v^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

Innfor $\gamma = \frac{m}{2kT}$

Vi må regne ut integralet

$$\int_0^{\infty} dv v^3 e^{-\gamma v^2}$$

Innfor $u = v^2$
 $v dv = \frac{1}{2} du$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} du u e^{-\gamma u}$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{d}{d\gamma} \underbrace{\int_0^{\infty} du e^{-\gamma u}}_{=1/\gamma} = \frac{1}{2\gamma^2}$$

$$\langle v \rangle = 4\pi \left(\frac{\gamma}{\pi} \right)^{3/2} \frac{1}{2\gamma^2} = 2 \sqrt{\frac{\pi}{\pi\gamma}}$$

$$= 2 \sqrt{\frac{2kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \quad \left(\text{Se PCH 9.16} \right)$$

Dermed den største verdien av den $\langle v \rangle$ er midlere en utslipps-hastighet, kan molekylær hydrogen eksistere i atmosfære på Gassene.

(13)

$\langle v \rangle_{\max}$ oppnås ved $T_{\max} = 152 \text{ K}$

$$\langle v \rangle_{\max} = \sqrt{\frac{8 \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 152}{3.14 \cdot 3.36 \cdot 10^{-27}}} \text{ m/s}$$

$$= \sqrt{\frac{8 \cdot (1.38) \cdot (152)}{3.14 \cdot (3.36)}} \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

$$= \underline{\underline{1261 \text{ m/s}}} < 2700 \text{ m/s}$$

Ifølge dette estimat vil molekylært hydrogen kunne eksistere i atmosfære på Gany med.

Kommentar: En kunne også se på $\sqrt{\langle v^2 \rangle}$ og få den samme konklusjon.

Hastigheter i H_2 -gasser er normalt fordelt, så det finnes en kjerne i fordelingen der partikler har større ~~hastighet~~ ^{energi} enn $\langle v \rangle$. Denne kjerne blir bredere når m øker, derfor forventer vi at mengden av H_2 er relativt lav.

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8}{\pi} \frac{kT}{m}}$$

$$\sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{3 \frac{kT}{m}}$$

$$\langle v^4 \rangle^{1/4} = \sqrt[4]{15 \frac{kT}{m}}$$

} Alle disse
gir samme
konklusjon

b)

Vi bruker igjen

(14)

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

$$\langle v \rangle < 2700 \text{ m/s for it}$$

CH₄ skal kunne eksistere i Gass medier
at mos fare

$$\sqrt{\frac{8 \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot T}{\pi \cdot 2.66 \cdot 10^{-26}}} \leq 2700 \text{ m/s}$$

$$T < T_{\max}$$

$$T_{\max} = \frac{(2.7 \cdot 10^3)^2 \cdot \pi m}{8k} \text{ i: K}$$

$$= \frac{(2.7)^2 \cdot 3.14 \cdot 2.66 \cdot 10^{-26} \cdot 10^6}{8 \cdot 1.38 \cdot 10^{-23}}$$

$$= \frac{(2.7)^2 \cdot 3.14 \cdot (2.66)}{8 \cdot 1.38} \cdot 10^3$$

$$= \cancel{8815} \quad \underline{\underline{5515 \text{ K}}}$$

Dette er langt høyere en temperatur
norsinn vil kunne bli på Gass medier
overflate. Atmosfære inneholder mye
metan (CH₄)

c)

Totalt utstrålt effekt fra sola:

$P = A \cdot \sigma T^4$, der σ er Stefan-Boltzmann konstanten

$$A = 4\pi R_{sol}^2$$

$$T = 5800 \text{ K}$$

$$\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}$$

$$R_{sol} = 7 \cdot 10^8 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} P &= 4\pi (7)^2 \cdot 10^{16} \cdot (5.67 \cdot 10^{-8}) \cdot (5.8)^4 \cdot 10^{12} \text{ W} \\ &= 4\pi \cdot 49 \cdot 5.67 \cdot (5.8)^4 \cdot 10^{20} \text{ W} \\ &= \underline{\underline{3.95 \cdot 10^{26} \text{ W}}} \end{aligned}$$

Denne utstrålte energi fra sole fordeles seg jevnt på ~~areal~~ enhver kuleflate i lagene rundt sola. Stasjonære forhold betyr at P er konstant på enhver slik kuleflate. La kuleflaten ha radius R_0 . Da er innstrålingen fra sole pr. arealenhet på en slik flate gitt ved

$$P_{inn}(R_0) = \frac{P}{4\pi R_0^2}$$

$$\text{Hv: } R_0 = 820 \cdot 10^9 \text{ m}$$

Ganymede har radius $R_G = 2.6 \cdot 10^6 \text{ m}$ (16)
 og projiserer et areal πR_G^2 mod
 strålingen fra sola.

Innstreikt effekt på Ganymede fra sola
 blir da:

$$P_{\text{inn, G}} = P \cdot \frac{\pi R_G^2}{4\pi R_0^2} = \frac{1}{4} \cdot P \left(\frac{R_G}{R_0} \right)^2$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 3.95 \cdot 10^{26} \left(\frac{2.6 \cdot 10^6}{8.2 \cdot 10^{11}} \right)^2 \text{ W}$$

$$= 9.93 \cdot 10^{14} \text{ W}$$

d) Kraften pr. flikeinheit som strålingen
 utøver på Ganymede, i termisk likevekt,
 er likt med i fotongannet på
 Ganymedes overflate.

Oppsett: $u = \alpha T^4$ $U = u \cdot V$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right) - p$$

$$\alpha T^4 = T \frac{d\alpha}{dT} - p$$

Er så at $p = \gamma T^4$ er en løsning

$$\alpha T^4 = (4\gamma - \gamma) T^4 = 3\gamma T^4$$

$$\gamma = \frac{\alpha}{3} \Rightarrow p = \frac{\alpha}{3}$$

$$\sigma T^4 = \frac{c}{4} \cdot \alpha T^4 \Rightarrow \alpha = \frac{4\sigma}{c}$$

$$p = \frac{1}{3} \alpha T^4 = \frac{1}{3} \frac{4\sigma}{c} T^4 = \frac{4}{3c} j_{\text{inn}}$$

$$j_{\text{irr}, G} = \frac{P_{\text{irr}, G}}{2\pi R a^2} = \sigma T^4$$

Für dielektronen ist $p = \frac{1}{3} \sigma T^4$

$$p = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{c} \sigma T^4 = \frac{4}{3c} j_{\text{irr}, G}$$

$$= \frac{4}{3c} \cdot \frac{P_{\text{irr}, G}}{2\pi R a^2}$$

$$= \frac{4}{3 \cdot 3 \cdot 10^8} \cdot \frac{9.93 \cdot 10^{14} \text{ W}}{2 \cdot 3.14 \cdot (7.6 \cdot 10^8)^2} \text{ s} : \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$= \frac{4}{9} \cdot \frac{9.93}{6.28} \cdot \frac{1}{6.76} \cdot 10^{14-8-12} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$= 1.039 \cdot 10^{-6} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \underline{\underline{1.04 \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}}}$$

$$\approx 1 \cdot 10^{-12} \text{ Atmosphären}$$