

Løsningsforslag T FY 4165
15. 12. 2016

Oppgave 1

a) $\vec{j}(\vec{r}) = -x \vec{\nabla} T$
 $= j(r) \hat{e}_r$

$\hat{e}_r$: Radiell enhetsvektor

$$j(r) = -x \frac{dT}{dr}$$

$$\dot{Q} = 4\pi r^2 j(r)$$
$$= \iint d\vec{A} \cdot \vec{j}$$

Her er A en flate som strømmen passerer igjennom. (en kuleflate med radius r).

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

Stasjonære forhold: $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$
 $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$

$$\iiint_V dV \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \iint_{A(V)} d\vec{A} \cdot \vec{j} = 0$$

Det strømmer like mye energi inn i volumet V , som ut av det.

Velg nå et volum V begrenset av et kule skall med radius r og et kule skall med radius $r+dr$.

$$\oint_S d\vec{S} \cdot \vec{j} = \dot{Q}(r) - \dot{Q}(r+dr) = 0$$

$\dot{Q}(r)$ strømmer inn i volumet
 $\dot{Q}(r+dr)$ strømmer ut av volumet

$$\dot{Q}(r) = \dot{Q}(r+dr) \Rightarrow$$

$$\frac{d\dot{Q}}{dr} = 0$$

$$\underline{\underline{\dot{Q}(r) \text{ uavh. av } r}}$$

b) Fourier's lov

$$\dot{Q} = 4\pi r^2 j(r)$$

$$= -4\pi r^2 \kappa \frac{dT}{dr}$$

$$= -4\pi a r^2 T \frac{dT}{dr} ; \kappa = aT$$

$$T dT = - \frac{\dot{Q}}{4\pi a} \frac{dr}{r^2}$$

$$\int_{T(R_1)}^{T(r)} T dT = - \frac{\dot{Q}}{4\pi a} \int_{R_1}^r \frac{dr}{r^2}$$

$$\frac{1}{2} [T^2(r) - T_1^2] = \frac{\dot{Q}}{4\pi a} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} \right)$$

$\dot{Q}$ kan bestemmes fra
grænsebetingelsen $T(R_2) = T_2$

$$\frac{\dot{Q}}{4\pi a} = \frac{\frac{1}{2} (T_2^2 - T_1^2)}{\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)}$$

$$T(r) = \sqrt{T_1^2 + (T_1^2 - T_2^2) \frac{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{r} \right)}{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)}}$$

c)

$$\frac{\dot{Q}}{4\pi a} = \frac{1}{2} \frac{(T_2^2 - T_1^2)}{\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)}$$

$$T_1^2 = T_2^2 + \frac{\dot{Q}}{2\pi a} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$T_{1\max}$ bestemt av kravet om
at $\dot{Q}_{\max} = 1000 \text{ K}$.

Insetting av numeriske verdier:

$$\underline{\underline{T_1 = 201.5 \text{ K}}}$$

Oppgave 2

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad T dS &= \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_y dT + \underbrace{\left[\left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)_T + X \right]}_{\text{fra formelene}} dy \\ &= \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_y dT + T \left(\frac{\partial X}{\partial T} \right)_y dy \\ &= \underline{C_y dT + T \left(\frac{\partial X}{\partial T} \right)_y dy} \end{aligned}$$

$$\text{b)} \quad X = \chi \left(\frac{y}{T} \right)^\alpha$$

$$T \left(\frac{\partial X}{\partial T} \right)_y = -\chi \alpha \left(\frac{y}{T} \right)^\alpha$$

$$\underline{T dS = C_y dT - \alpha \chi \left(\frac{y}{T} \right)^\alpha dy} \quad (*)$$

$$\text{Adiabatt: } T dS = 0$$

$$0 = C_y T dT - \chi \alpha y^\alpha dy$$

$$\underline{C_y T^{\alpha+1} - \chi \alpha y^{\alpha+1} = \text{konst.}}$$

$$A = C_y$$

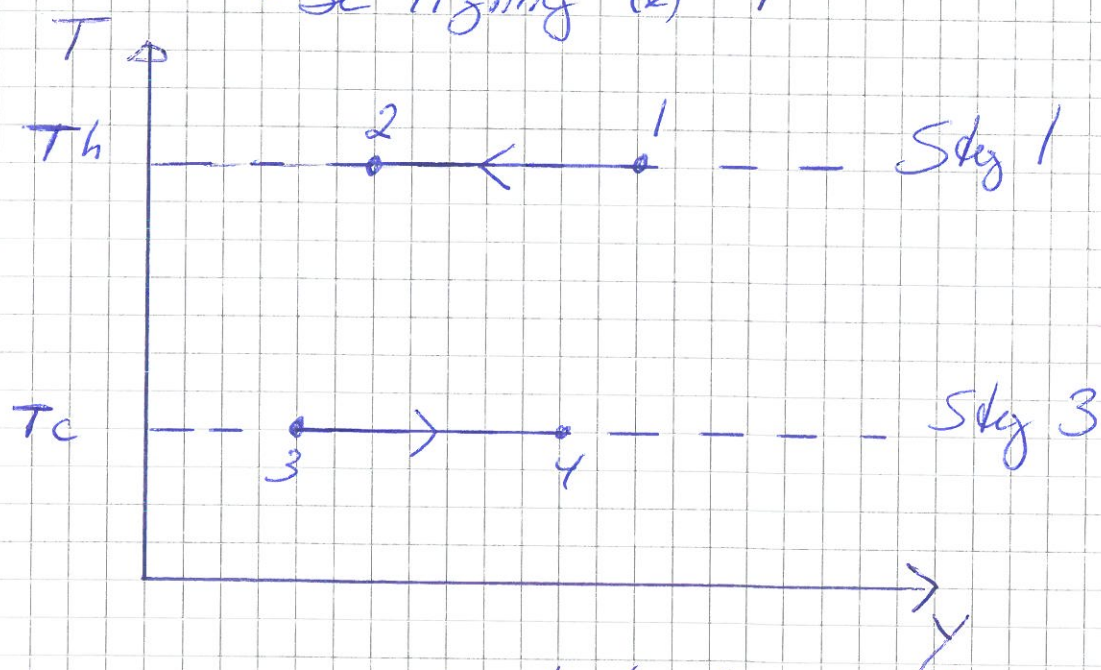
$$B = \alpha \chi$$

$$\underline{\underline{\beta = \alpha + 1}}$$

c) $TdS = C_y dT - \alpha \chi \left(\frac{y}{T}\right)^\alpha dy$

1: Isoterm varme tilførsel ved T_h
 $dT=0$; $TdS > 0 \Rightarrow dy < 0$
 Se ligning (*)

3: Isoterm varme ^{avgang} ~~tilførsel~~ ved T_c :
 $dT=0$; $TdS < 0 \Rightarrow dy > 0$
 Se ligning (*)



2 og 3 må forbindes med
 en adiabat (Steg 2)

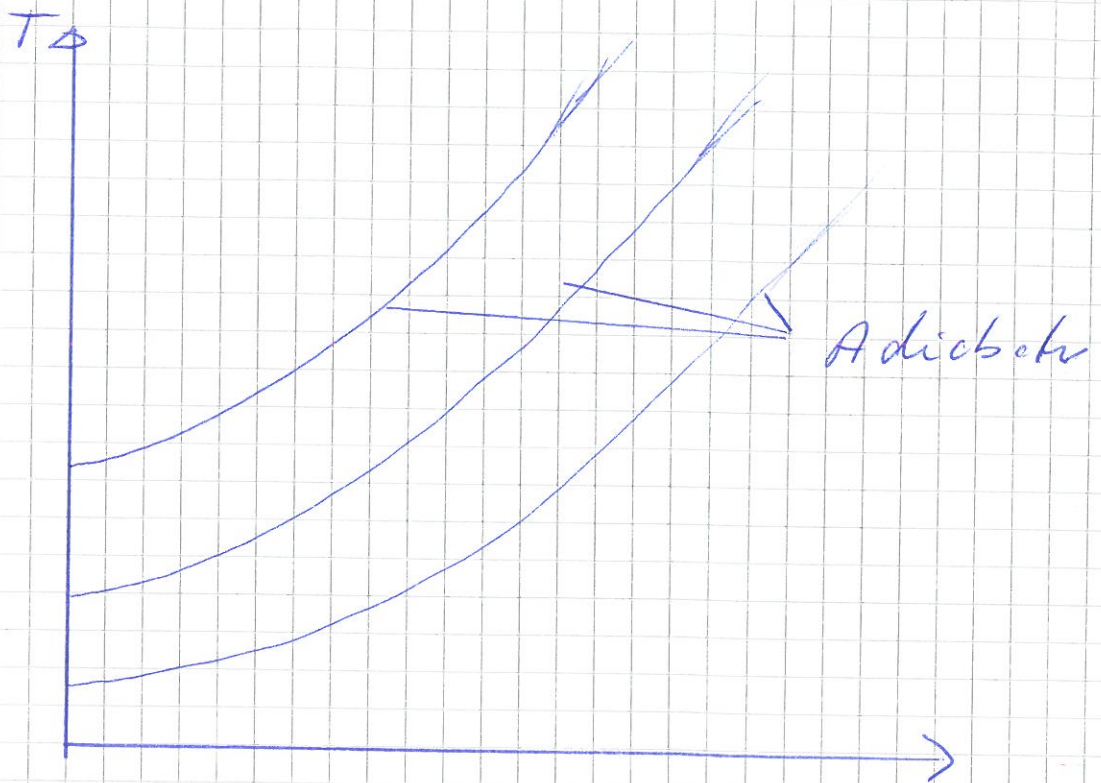
4 og 1 må forbindes med
 en adiabat (Steg 4)

Adiabat-ligning:

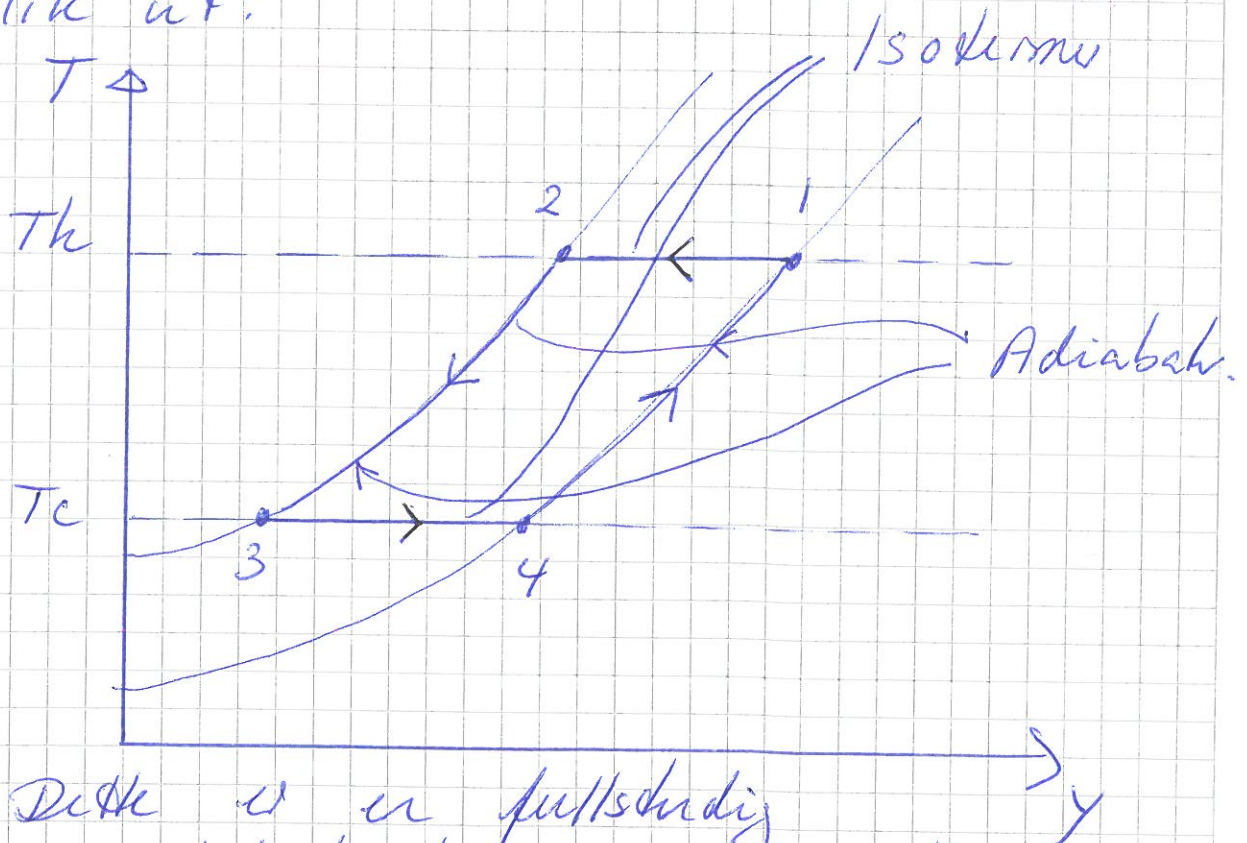
$$C_y T^{\alpha+1} - \alpha \chi y^{\alpha+1} = K$$

$$T = \left(\frac{K + \alpha \chi y^{\alpha+1}}{C_y} \right)^{\frac{1}{\alpha+1}}$$

Adiabaten su da slik ut:



Demud blik prosess sunde y slik ut:



Dette er en fullstendig
reversibel kretsprosess begynt an
to adiabat og to isoterm $\Rightarrow$
Carnot-prosess

d) Varme tilføres når $4 \rightarrow 3$ (T_c)
 Varme afgives $2 \rightarrow 1$ (T_h)

$$Q_d = \int_4^3 T dS \quad (\text{isoderm})$$

$$= \int_4^3 T \left(\frac{\partial X}{\partial T} \right)_Y dy$$

$$= -\chi_\alpha \frac{T_c}{T_c^{\alpha+1}} \int_4^3 dy y^\alpha$$

$$= -\frac{\chi_\alpha}{\alpha+1} \frac{1}{T_c^\alpha} \left(y_3^{\alpha+1} - y_4^{\alpha+1} \right)$$

$$= \frac{\chi_\alpha}{\alpha+1} \frac{1}{T_c^\alpha} \left(y_4^{\alpha+1} - y_3^{\alpha+1} \right) > 0$$

$$Q_a = -\frac{\chi_\alpha}{\alpha+1} \frac{1}{T_h^\alpha} \left(y_1^{\alpha+1} - y_2^{\alpha+1} \right) < 0$$

$$\eta = \left| \frac{Q_a}{W} \right| = \frac{Q_a}{Q_a + Q_d} = \frac{1}{1 + \frac{Q_d}{Q_a}}$$

$$\frac{Q_d}{Q_a} = - \left(\frac{T_h}{T_c} \right)^\alpha \cdot \left(\frac{y_4^{\alpha+1} - y_3^{\alpha+1}}{y_1^{\alpha+1} - y_2^{\alpha+1}} \right)$$

Nå brukes vi den fjerde adiabatlikningen (pkt b) til å eliminere y -ne til fordel for T -ene

$$\textcircled{x} C_p T_1^{\alpha+1} - \alpha X y_1^{\alpha+1} = C_p T_4^{\alpha+1} - \alpha X y_4^{\alpha+1}$$

$$\textcircled{xx} C_p T_2^{\alpha+1} - \alpha X y_2^{\alpha+1} = C_p T_3^{\alpha+1} - \alpha X y_3^{\alpha+1}$$

$$T_1 = T_2 = T_h$$

$$T_3 = T_4 = T_c$$

$$\textcircled{x} - \textcircled{xx} : y_2^{\alpha+1} - y_1^{\alpha+1} = y_3^{\alpha+1} - y_4^{\alpha+1}$$

$$\Rightarrow \frac{Q_H}{Q_C} = \eta$$

$$\frac{Q_H}{Q_C} = - \left(\frac{T_h}{T_c} \right)^{\alpha} \left(\frac{y_4^{\alpha+1} - y_3^{\alpha+1}}{y_1^{\alpha+1} - y_2^{\alpha+1}} \right)$$

$$\eta = \frac{1}{1 - \left(\frac{T_h}{T_c} \right)^{\alpha}}$$

Kommentar: Dette er ikke hva en forventer basert på Carnot-prosesser.
Det skyldes sammenhengen mellom C_p og X

Oppgave 3

a)

De 10-atomige molekylene har følgende kvadratiske frihetsgrader.

i) Kinetisk energi av masser : 2

ii) Kinetisk og potensiell energi forbundet med vibrasjon langs forbindelses-aksen mellom atomene : 2

iii) Rotasjon om z-aksen : 1

Totalt 5 kvadratiske frihetsgrader.

Varmekapasitet pr. molekyl:

$$C = 5 \cdot \frac{k}{2}$$

b)

$$Z = (Z_1)^N \quad (\text{oppsett})$$

$$Z_1 = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta \hbar \omega (n + 1/2)}$$

$$x \equiv \beta \hbar \omega$$

$$Z_1 = e^{-\frac{x}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{1 - e^{-x}}$$

$$Z = \left(\frac{1}{2 \sinh(\frac{x}{2})} \right)^N = e^{-\beta F}$$

$$\beta F = N \ln \left[2 \sinh \left(\frac{\beta \hbar \omega}{2} \right) \right]$$

$$C = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = -k \beta^2 \left(\frac{\partial U}{\partial \beta} \right)$$

Sammenheng mellom F og U

$$\left. \begin{array}{l} F = U - TS \\ S = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_V \end{array} \right\} \Rightarrow U = F - T \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_V$$

$$= F + \beta \left(\frac{\partial F}{\partial \beta} \right)_V$$

$$= \frac{\partial (\beta F)}{\partial \beta}$$

$\Rightarrow$

$$U = N \frac{\partial}{\partial \beta} \ln \left(2 \sinh \left(\frac{\beta \hbar \omega}{2} \right) \right)$$

$$= N \frac{\hbar \omega}{2} \coth \left(\frac{\beta \hbar \omega}{2} \right)$$

$$C = -k \beta^2 \left(\frac{\partial U}{\partial \beta} \right)$$

$$= N k \left(\frac{\beta \hbar \omega}{2} \right)^2 \cdot \frac{1}{\sinh^2 \left(\frac{\beta \hbar \omega}{2} \right)}$$

i) $\beta \hbar \omega \ll 1$

$$\frac{C}{N} \approx k = \frac{k}{2} + \frac{k}{2} \quad (\text{jth. off. a})$$

ii) $\beta \hbar \omega \gg 1$

$$\sinh\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x})$$

$$\approx \frac{1}{2} e^x$$

$$\frac{C}{N} \approx k (\beta \hbar \omega)^2 e^{-\beta \hbar \omega} \ll k$$

c) $kT \gg \hbar \omega \Rightarrow$

$$\frac{C}{N} \approx \frac{5}{2} k$$

$T \ll T_0$: Bidraget fra
vibrasjonene forsvinner $\Rightarrow$
et bidrag k forsvinner med
 $T = T_0$

