

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
 Institutt for fysikk

Fagleg kontakt under eksamen:

Navn: Emil J. Samuelsen

Tlf.: 93412

EKSAMEN I FAG SIF4022 FYSIKK 2

2. august 2000

Tid: 0900 – 1400

Tillatte hjelpemiddel: Rottmann: Matematisk formelsamling. Lommekalkulator

For oppgave 3 skal kandidaten velje å svare på fire av dei seks deloppgavene.

Oppgitte formlar og data:

Mekaniske bølger

$$\text{Effekt: } P = \frac{1}{2} \mu A^2 \omega^2 v$$

Lydbølger

$$\text{Fart: Fluidum: } v = (K/\rho_0)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{Ideell gass: } K = \gamma P_0, \quad \text{Faststoff: } v = (G/\rho)^{\frac{1}{2}} \text{ og } (E/\rho)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{Intensitet: } I = \frac{1}{2} \rho_0 s_m^2 \omega^2 v = \frac{1}{2} \cdot \frac{P_m^2}{\rho_0 v}$$

Doppler-effekt:

$$\text{klassisk: } v_D \text{ og } v_s \text{ er valde positive i same retning: } f' = f \frac{1 - v_D/v}{1 - v_s/v}$$

$$\text{relativistisk: } f' = f \cdot \left(\frac{1 - v/c}{1 + v/c} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Maxwells likningar:

$$\oint \epsilon_r \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} ; \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 ; \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_m}{dt} ; \oint \frac{1}{\mu_r} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \left(I + \epsilon_0 \cdot \frac{d\Phi_c}{dt} \right)$$

Interferens: N- bølger $I = I_0 \left(\frac{\sin \frac{\phi}{2} N}{\sin \frac{\phi}{2}} \right)^2$ der ϕ er fasevinkelforskjell mellom nabobølger.

Diffraksjon: Enkeltspalte $I = I_0 \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2$ der $\alpha = \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}$ ved loddrett innfall.

FYSISKE KONSTANTAR

gravitasjonskonstanten	G, f	=	66,72 pN · m ² /kg ²
	def		
standard tyngdeakselerasjon	g _n	=	9,806 65 m/s ²
lysfarten i tomt rom	c	=	299,792 458 Mm/s
	def		
tomromspermeabiliteten	μ ₀	=	4π · 10 ⁻⁷ H/m = 1,256 637 061 44 μH/m
tomromspermittiviteten	ε ₀	=	(c ² μ ₀) ⁻¹ = 8,854 187 82 pF/m
elementærladningen	e	=	1,60 2189 · 10 ⁻¹⁹ C
	e'	=	4,803 242 · 10 ⁻¹⁰ ese
Planck-konstanten	h	=	6,626 18 · 10 ⁻³⁴ Js = 4,135 70 feV · s
	ħ	=	h/2π = 1,054 589 · 10 ⁻³⁴ Js
		=	0,658 218 feV · s
molar gasskonstant	R	=	8,314 41 J/(mol · K)
molart volum for idealgass ved			
p ₀ = 1 atm	V ₀	=	RT ₀ /p ₀ = 22,4138 dm ³ /mol
= 101,325 kPa			
og T ₀ = 273,15 K			
Avogadro-konstanten	N _A	=	6,022 045 · 10 ²³ mol ⁻¹
Boltzmann-konstanten	k _B	=	R/N _A = 1,380 66 · 10 ⁻²³ J/K
Faraday-konstanten	F	=	N _A e = 96,484 56 kC/mol
Stefan-Boltzmann-			
konstanten	σ	=	π ² k ⁴ /(60 ħ ³ c ²) = 56,703 nW/(m ² K ⁴)
finstrukturkonstanten	α	=	μ ₀ ce ² /2ħ = e' ² /(ħc)
		=	1/137,036 04 = 7,297 351 · 10 ⁻³
Rydberg-konstanten	R _∞	=	e ⁴ m _e /(8 ε ₀ ² ħ ³ c) = 1,097 373 18 · 10 ⁷ m ⁻¹
Bohr-radien	a ₀	=	4π ε ₀ ħ ² /(m _e e ²) = α/(4π R _∞) = ħ ² /(m _e e' ²)
		=	52,917 71 pm
elektronradien	r _e	=	μ ₀ e ² /(4πm _e) = e' ² /(m _e c ²) = 2,817 938 fm
	def		
atommasseenheten	u	=	$\frac{10^{-3}}{N_A}$ kg / mol = 1,660 566 · 10 ⁻²⁷ kg
elektronet	m _e	=	9,10 9530 · 10 ⁻³¹ kg
protonet	m _p	=	1,672 649 · 10 ⁻²⁷ kg
nøytronet	m _n	=	1,674 954 · 10 ⁻²⁷ kg
hydrogenatomet	m(¹ H)	=	1,673 559 · 10 ⁻²⁷ kg
deuteriumatomet	m(² H)	=	3,344 548 · 10 ⁻²⁷ kg
heliumatomet	m(⁴ He)	=	6,646 585 · 10 ⁻²⁷ kg

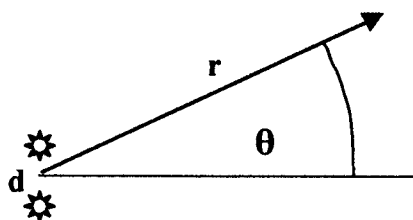
Oppgave 1

To like høgtalarar (for lyd) står midt på ein stor, rund, open plass i innbyrdes avstand $d = 1\text{ m}$. Kvar høgtalar sender ut ein total-effekt på $P = 1\text{ W}$ som fordeler seg likt i alle retningar (både til sides og opp og ned). Frekvensen er $f = 440\text{ Hz}$, og lydfarten i lufta er $v = 340\text{ m/s}$. Ein kan regulere faseforskjellen ϕ mellom dei ($\phi = 0$ betyr at dei sender i fase).

- a) Kor stor intensitet I_1 vil ein observere i ein avstand $r = 50\text{ m}$ når berre ein av høgtalarane er slått på?

Angi også lydstyrkenivået (i desibel) i forhold til nedre høregrense.

- b) Utlei korleis observert intensitet $I(\theta)$ vil variere med vinkelen θ (vinkelen mellom normalen til sambandslinja mellom kjeldene og observasjons-retninga, sjå skissa) når



ein detektor blir flytta på ein sirkel med radius $r = 50\text{ m}$ rundt høgtalarane, og begge høgtalarane er på.

Beskriv og lag skisse for tilfellet $\phi = 0^\circ$ (m.a. kor mange maksima og minima, og retningane for dei).

- c) Detektoren står i ro ved $\theta = 0$, medan faseforskjellen ϕ blir regulert til å variere proporsjonalt med tida ($\phi = p \cdot t$). Beskriv korleis observert intensitet varierer med tida. Kva blir tilsvarende intensitetsvariasjon for $\theta = 90^\circ$?
- d) Gjenta spørsmål b) etter at ein tredje identisk høgtalar er blitt plassert midt mellom dei to opprinnelege, og alle tre høgtalarane er i fase.

Oppgave 2. (Sjå vedlegg 1 for nyttige integral)

- a) Kva er ei Schrödinger-likning for eit fysisk system? Klassisk energi for ein partikkel med masse m i eit eindimensjonalt harmonisk potensial kan skrivast som

$$H(p, x) = \frac{1}{2} \frac{p^2}{m} + \frac{1}{2} kx^2$$

der p = drivet (rørslemengd/bevegelsesmengd)
 x = posisjonen
 k = kraftkonstant.

Forklar korleis ein frå dette kan finne at Schrödingerlikninga blir

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2} kx^2 \psi = E\psi \quad (1)$$

b) Vis at

$$\psi_1 = A \cdot e^{-ax^2} \quad (2)$$

er ei mulig løysing av Schrödingerlikninga. Vis at parameteren a er $a = \frac{1}{2}(mk)^{\frac{1}{2}}/\hbar$,

og at for den aktuelle løysinga er $E = \frac{1}{2}\hbar\omega$ der $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Vis også ved hjelp av

normaliseringskrav at parameteren $A = (mk/\pi^2\hbar^2)^{\frac{1}{8}}$.

c) Ei anna mulig løysing er

$$\psi_2 = Bx e^{-ax^2} \quad (3)$$

(der $a = \frac{1}{2}(mk)^{\frac{1}{2}}/\hbar$ og $B = (2\pi)^{\frac{1}{2}}(mk/\pi^2\hbar^2)^{\frac{3}{8}}$, men det behøver ein ikkje vise.)

Bestem uttrykk for forventingsverdiane for x og x^2 for kvar av tilstandane ψ_n med $n = 1$ og $n = 2$.

d) Ein enkel modell for elektron i metall er "partikkel-i-boks" modellen, der elektronet fritt kan bevege seg i ein boks med dimensjon lik metallstykket (L_1 L_2 L_3 i dei tre retningane).

Beskriv ein eindimensjonal "partikkel-i-boks" modell, med Schrödinger-likning og det heile (dvs. løysingar), og forklar kort kva for eigenskapar for metallet modellen kan beskrive.

Oppgave 3.

- Skriv opp bøljelikninga i tre dimensjoner for ei generell bølge med bølgefart v , og vis at likninga gjeld for ei harmonisk planbølge.
- Koherent laserlys med bøljelengd $\lambda = 780$ nm blir sendt mot eit total-reflekterande objekt som har fart $v_s = 100$ km/h mot lyskjelda. Det er mulig med spegl-innretningar å fange opp ein del av det reflekterte lyset og å "blande" det med ein del av det

oppinnelege lyset på ein slik måte at dei to strålane er like sterke og går i same retning (i ein "detektorboks" montert saman med laseren).

Beskriv resultantbølgja for dei to bølgjene (der dei er "blanda") og rekn ut svevefrekvensen.

- c) I vedlagte tabell (vedlegg 2) er gitt matematiske uttrykk for bølgefunksjonane for elektronet i hydrogen-atomet. Kva forstår ein med s, p og d-orbital, og kva betydning har orbitalane for beskrivelsen av bindingar i molekyl?
- d) Beskriv kort minst to eksempel på at klassisk fysikk ikkje gir rett beskrivelse av den fysiske verda, men der kvantemekanikken fungerer.
- e) Forklar korleis ein på kvantemekanisk grunnlag forstår skilnaden på elektrisk leiande, halvleiande og isolerande materiale. Nemn eksempel.
- f) Et materiale i form av elastiske stavar har bølgefart $v = 4800$ m/s for lydforplantning i staven. To slike stavar, med ulike lengder $L_1 = 200$ cm og $L_2 = 195$ cm er begge spennde opp i begge endar.

Bestem frekvensane for dei bølgefenaomena ein kan observere når dei to oppspennde stavane samtidig blir sette i svingingar i luft.

Vedlegg 1. Nyttige bestemte integral

Table A.3: Some useful definite integrals.

$\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n! \text{ (n integer)}$	
$\int_0^{\infty} \frac{xe^{-x}}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^2}{6} - 1$	$\int_0^{\infty} \frac{x^3 e^{-x}}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}$
$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + e^x} = \ln 2$	$\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\pi}$
$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$	$\int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}$
$\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{1}{4} \sqrt{\pi}$	$\int_0^{\infty} x^3 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}$
$\int_0^{\infty} x^4 e^{-x^2} dx = \frac{3}{8} \sqrt{\pi}$	$\int_0^{\infty} x^5 e^{-x^2} dx = 1$
$\int_0^{\infty} x^6 e^{-x^2} dx = \frac{15}{16} \sqrt{\pi}$	$\int_0^{\infty} x^7 e^{-x^2} dx = 3$
$\int_0^{\infty} x \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) dx = \left(\frac{a}{\pi}\right)^2 \int_0^{\pi} \zeta \sin^2 \zeta d\zeta = \frac{a^2}{4}$	

Vedlegg 2. Bølgjefunksjonar for hydrogenatomet**Table 19.1** Normalised eigenfunctions of the one-electron atom for $n = 1, 2$, and 3 .
For hydrogen $Z = 1$

n	l	m_l	$\psi_{n,l,m_l}(r, \theta, \phi) = R_{n,l}(r) \Theta_{l,m_l}(\theta) \Phi_{m_l}(\phi)$			
1	0	0	$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} e^{-Zr/a_0}$		1	1
2	0	0	$\frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \left(\frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} \left(2 - \frac{Zr}{a_0} \right) e^{-Zr/2a_0}$		1	1
2	1	0	$\frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \left(\frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} \frac{Zr}{a_0} e^{-Zr/2a_0}$	$\cos \theta$		1
2	1	± 1	$\frac{1}{8\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} \frac{Zr}{a_0} e^{-Zr/2a_0}$	$\sin \theta$		$e^{\pm i\phi}$
3	0	0	$\frac{1}{81\sqrt{3\pi}} \left(\frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} \left(27 - 18 \frac{Zr}{a_0} + 2 \frac{Z^2 r^2}{a_0^2} \right) e^{-Zr/3a_0}$		1	1
3	1	0	$\frac{\sqrt{2}}{81\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} \left(6 - \frac{Zr}{a_0} \right) \frac{Zr}{a_0} e^{-Zr/3a_0}$	$\cos \theta$		1
3	1	± 1	$\frac{1}{81\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} \left(6 - \frac{Zr}{a_0} \right) \frac{Zr}{a_0} e^{-Zr/3a_0}$	$\sin \theta$		$e^{\pm i\phi}$
3	2	0	$\frac{1}{81\sqrt{6\pi}} \left(\frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} \frac{Z^2 r^2}{a_0^2} e^{-Zr/3a_0}$	$(3 \cos^2 \theta - 1)$		1
3	2	± 1	$\frac{1}{81\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} \frac{Z^2 r^2}{a_0^2} e^{-Zr/3a_0}$	$\sin \theta \cos \theta$		$e^{\pm i\phi}$
3	2	± 2	$\frac{1}{162\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} \frac{Z^2 r^2}{a_0^2} e^{-Zr/3a_0}$	$\sin^2 \theta$		$e^{\pm 2i\phi}$