

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
 Institutt for fysikk

Fagleg kontakt under eksamen:

Navn: Emil J. Samuelsen

Tlf.: 93412

EKSAMEN I FAG SIF4022 FYSIKK 2

Tirsdag 4. desember 2001

Tid: 0900 – 1400

Sensurfrist 31.12 2001

Tillatte hjelpemiddel: Type C, Rottmann: Matematisk formelsamling.
 Enkel lommekalkulator

Ein integraltabell finst i Vedlegg 1.

For oppgave 3 skal kandidaten velje å svare på fire av dei fem deloppgavene.

Oppgitte formlar og data:

Mekaniske bølger

$$\text{Effekt: } P = \frac{1}{2} \mu A^2 \omega^2 v$$

Lydbølger

$$\text{Fart : Fluidum : } v = (K / \rho_0)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad \text{Ideell gass : } K = \gamma P_0, \quad \text{Faststoff : } v = (G / \rho)^{\frac{1}{2}} \quad \text{og} \quad (E / \rho)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{Intensitet: } I = \frac{1}{2} \rho_0 s_m^2 \omega^2 v = \frac{1}{2} \cdot \frac{p_m^2}{\rho_0 v}$$

Doppler-effekt:

$$\text{klassisk: } v_D \text{ og } v_s \text{ er valde positive i same retning: } f' = f \frac{1 - v_D / v}{1 - v_s / v}$$

relativistisk:

$$f' = f \cdot \left(\frac{1 - v/c}{1 + v/c} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Maxwells likningar:

$$\oint_{\epsilon_r} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad ; \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad ; \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \frac{d\Phi_m}{dt} \quad ; \quad \oint \frac{1}{\mu_r} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \left(I + \epsilon_0 \cdot \frac{d\Phi_e}{dt} \right)$$

Interferens: N- bølger $I = I_0 \left(\frac{\sin \frac{\phi}{2} N}{\sin \frac{\phi}{2}} \right)^2$ der ϕ er fasevinkelforskjell mellom nabobølger.

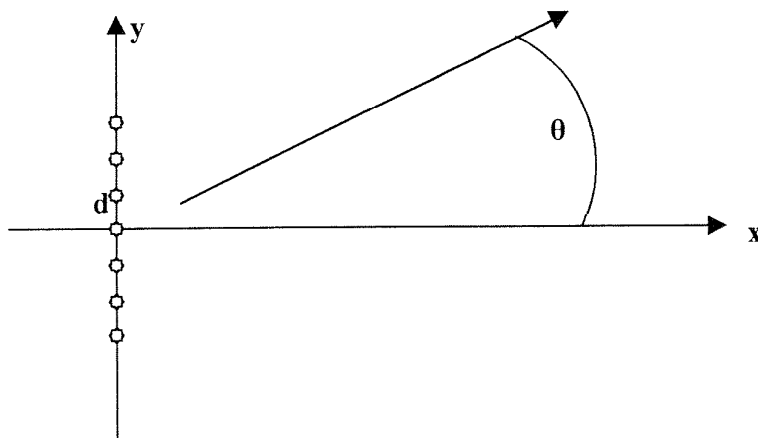
Diffraksjon: Enkeltspalte $I = I_0 \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2$ der $\alpha = \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}$ ved loddrett innfall.

FYSISKE KONSTANTAR

gravitasjonskonstanten	G, f	=	66,72 pN · m ² /kg ²
	def		
standard tyngdeakselerasjon	g _n	=	9,806 65 m/s ²
lysfarten i tomt rom	c	=	299,792 458 Mm/s
	def		
tomromspermeabiliteten	μ ₀	=	4π · 10 ⁻⁷ H/m = 1,256 637 061 44 μH/m
tomromspermittiviteten	ε ₀	=	(c ² μ ₀) ⁻¹ = 8,854 187 82 pF/m
elementærladningen	e	=	1,60 2189 · 10 ⁻¹⁹ C
	e'	=	4,803 242 · 10 ⁻¹⁰ ese
Planck-konstanten	h	=	6,626 18 · 10 ⁻³⁴ Js = 4,135 70 feV · s
	ħ	=	h/2π = 1,054 589 · 10 ⁻³⁴ Js
		=	0,658 218 feV · s
molar gasskonstant	R	=	8,314 41 J/(mol · K)
molart volum for idealgass ved			
p ₀ = 1 atm	V ₀	=	RT ₀ /p ₀ = 22,4138 dm ³ /mol
= 101,325 kPa			
og T ₀ = 273,15 K			
Avogadro-konstanten	N _A	=	6,022 045 · 10 ²³ mol ⁻¹
Boltzmann-konstanten	k _B	=	R/N _A = 1,380 66 · 10 ⁻²³ J/K
Faraday-konstanten	F	=	N _A e = 96,484 56 kC/mol
Stefan-Boltzmann-			
konstanten	σ	=	π ² k ⁴ /(60 ħ ³ c ²) = 56,703 nW/(m ² K ⁴)
finstrukturkonstanten	α	=	μ ₀ c e ² /2ħ = e' ² /(ħ c)
		=	1/137,036 04 = 7,297 351 · 10 ⁻³
Rydberg-konstanten	R _∞	=	e ⁴ m _e /(8 ε ₀ ² ħ ³ c) = 1,097 373 18 · 10 ⁷ m ⁻¹
Boln-radien	a ₀	=	4π ε ₀ ħ ² /(m _e e ²) = α/(4π R _∞) = ħ ² /(m _e e' ²)
		=	52,917 71 pm
elektronradien	r _e	=	μ ₀ e' ² /(4π m _e) = e' ² /(m _e c ²) = 2,817 938 fm
	def		
atommasseenheten	u	=	$\frac{10^{-3}}{N_A}$ kg / mol = 1,660 566 · 10 ⁻²⁷ kg
elektronet	m _e	=	9,10 9530 · 10 ⁻³¹ kg
protonet	m _p	=	1,672 649 · 10 ⁻²⁷ kg
nøytronet	m _n	=	1,674 954 · 10 ⁻²⁷ kg
hydrogenatomet	m(¹ H)	=	1,673 559 · 10 ⁻²⁷ kg
deuteriumatomet	m(² H)	=	3,344 548 · 10 ⁻²⁷ kg
heliumatomet	m(⁴ He)	=	6,646 585 · 10 ⁻²⁷ kg

Oppgave 1

N bølgekilder for elektromagnetiske bølger (antennar) står på ei rett rekke (i y -retninga) med jamn avstand d mellom næraste kjelder



Dei sender med same styrke, og same frekvens f , men der kan leggst inn ein styrt faseforskjell α mellom nabo-kjelder.

a) (7 poeng)

Utlei at intensiteten i stor avstand frå antennesystemet vil kunne uttrykkast med formelen

$$I(\theta) = I_0 \left(\frac{\sin(N\varphi/2)}{\sin(\varphi/2)} \right)^2$$

der $\varphi = \alpha + \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta$, λ er bølglengda, θ er vinkelen mellom normalen til rekka (dvs. x -aksen) og retninga mot punktet der observasjonen skjer. I_0 er observert intensitet dersom det var berre ei kjelde.

b) (13 poeng)

Drøft intensitetsvariasjonen med vinkelen θ og lag skisser for tilfella $N = 4$ og $N = 100$, når det dreier seg om mikrobølger (radar) med $f = 3,0 \cdot 10^9$ Hz, $d = 0,15$ m, $\alpha = 0$.

Kva for verdiar av faseforskjellen α må ein velje for at intensiteten i retning parallelt med rekka (): langs y -aksen, $\theta = 90^\circ$) skal bli størst mulig, når $N = 4$?

c) (15 poeng)

I denne oppgava fjernar ein antennerrekka og erstattar med to like bølgekilder plasserte nære kvarandre på y -aksen. Dei sender begge ut elektromagnetiske bølger med vinkelfrekvens ω .

Den eine kjelda står i ro, mens den andre blir sett i vibrasjonar med utslag $u(t) = A \sin(\Omega \cdot t)$ langs x -aksen. A er amplituden og Ω er vinkelfrekvensen for vibrasjonen.

Formulér eit uttrykk for intensitet som funksjon av tida t i stor avstand R langs x -aksen. Vi antar at $R \gg A$, og $\omega \gg \Omega$.

Bli der noka form for sveving? I såfall korfor?

Oppgave 2

- a) (10 poeng)
Skriv opp uttrykket for klassisk energi for eit elektron som beveger seg i avstand r frå eit fast punkt med positiv ladning, og utlei av dette Schrödingerlikninga for hydrogenatomet.
Beskriv deretter kvalitativt elektrontilstandane og energinivåa for H-atomet.
- b) (8 poeng)
Ein tenkeleg (men feilaktig) modell for H-atomet kunne vere at elektronet var bunde med ei elastisk fjær til atomet, dvs. hadde eit potensial av form

$$U(r) = \frac{1}{2} K r^2 \quad \text{der } K \text{ er fjærkonstanten.}$$

Still opp Schrödingerlikninga for det tilsvarande ein-dimensjonale tilfellet og påvis at ein bølgefunksjon av form

$$\psi_1 = A_1 \cdot x e^{-\beta x^2}$$

er ei mulig løysing. Bestem at energien er $E_1 = \frac{3}{2} \hbar \sqrt{\frac{K}{m}}$

- c) (7 poeng)
Dersom oscillatormodellen er antatt å gjelde for energiar opp til ionisasjons-energien $U_0 = 13,6 \text{ eV}$ for H-atomet, kor mange kvantetilstandar har systemet med energiar mindre enn U_0 , når $K = 6,8 \text{ J/m}^2$?
Korleis samsvarar dette med modellen i spørsmål 2a)?

Oppgave 3 Svar på fire av dei fem oppgavene.

- a) (10 poeng)
Piano-stemmaren har med seg ein kalibrert stemmegaffel som svinger med frekvens 512 Hz.
Korleis må han/ho gå fram for å få ein bestemt streng til å svinge med denne frekvensen, når han hører ei sveving med frekvens 3 Hz (når han set stemmegaffelen og strengen samtidig i svingingar)?
Kor stor prosentvis endring av stramminga må han gjere?
- b) (10 poeng)
Eit eindimensjonalt kvantemekanisk system er oppgitt å ha bølgefunksjonen

$$\psi = \begin{cases} A \cdot e^{-ax} & \text{for } x > 0 \\ A \cdot e^{+ax} & \text{for } x < 0 \end{cases} \quad (a > 0)$$

Bestem konstanten A uttrykt ved a dersom ψ er normalisert, og finn uttrykk for forventingsverdien av x^2 . Utval av integral i Vedlegg 1.

- c) (10 poeng)
Beskriv kort foto-elektrisk effekt. I kva forstand er effekten i strid med klassisk fysikk, men i samsvar med kvantefysikk?
- d) (10 poeng)
Bølger i eit medium er oppgitt å ha ein frekvensavhengig bølgefart etter formelen
- $$v = v_0 - a\omega^2 \quad \left(\text{for } \omega < \sqrt{\frac{v_0}{a}} \right)$$
- der v_0 og a er kjende konstanter. Uttrykk gruppefarten v_g i mediet som funksjon av vinkelfrekvensen ω .
- e) (10 poeng)
Forklar kva ein meiner med begrepet Fermi-energi (E_F) for metall, og kva ein forstår med Fermi-energi for intrinsiske halvleiarar.

Vedlegg 1 Tabell over enkelte integral

Table A.3: Some useful definite integrals.

$\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n! \quad (n \text{ integer})$	
$\int_0^{\infty} \frac{xe^{-x}}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^2}{6} - 1$	$\int_0^{\infty} \frac{x^3 e^{-x}}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}$
$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + e^x} = \ln 2$	$\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\pi}$
$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$	$\int_0^{\infty} xe^{-x^2} dx = \frac{1}{2}$
$\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{1}{4} \sqrt{\pi}$	$\int_0^{\infty} x^3 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}$
$\int_0^{\infty} x^4 e^{-x^2} dx = \frac{3}{8} \sqrt{\pi}$	$\int_0^{\infty} x^5 e^{-x^2} dx = 1$
$\int_0^{\infty} x^6 e^{-x^2} dx = \frac{15}{16} \sqrt{\pi}$	$\int_0^{\infty} x^7 e^{-x^2} dx = 3$
$\int_0^{\infty} x \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) dx = \left(\frac{a}{\pi}\right)^2 \int_0^{\pi} \zeta \sin^2 \zeta d\zeta = \frac{a^2}{4}$	