

Faglig kontakt under eksamen:
Professor Arne Brataas
Telefon: 93647

Eksamen i SIF4022 Fysikk 2

Onsdag 13. august 2003
09:00–14:00

Tillatte hjelpemidler: Alternativ C

Godkjent lommekalkulator.

K. Rottman: *Matematisk formelsamling*

Barnett and Cronin: *Mathematical formulae*

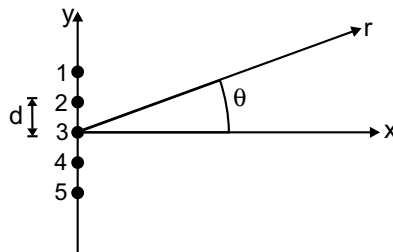
Øgrim og Lian: *Størrelser og enheter i fysikk og teknikk*

Sist i dette oppgavesettet er det gitt noen relasjoner som muligens kan være til nytte under eksamen. Kandidaten må selv tolke disse.

Dette oppgavesettet er på 4 sider.

Oppgave 1.

Fem høytalere (1, 2, 3, 4 og 5) står langs en rett linje (y -retningen) på en åpen plass med en lik innbyrdes avstand $d = 1.0\text{m}$ mellom dem. Hver enkelt høyttaler sender ut lydbølger med en effekt $P = 10\text{W}$ som fordeler seg likt i alle retninger. Vi kan regulere fase-konstanten til hver enkelt lydkilde (høyttaler) og disse er ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 , ϕ_4 og ϕ_5 . Frekvensen er $f = 880\text{Hz}$ og lydhastigheten i luften er $v = 340\text{m/s}$.



- a) Finn intensiteten vi vil observere i en (stor) avstand $r = 1000\text{m}$ når bare høyttaler nummer 3 er slått på.

Angi også lydstyrken (i desibel) i forhold til nedre hørselsgrense som er $I_0 = 10^{-12}\text{Wm}^{-2}$.

- b) I denne og de etterfølgende del-oppgavene c) og d) antar vi at alle høyttalerne er slått på.

Utled hvordan intensiteten $I(\theta)$ vil variere med vinkelen θ (vinkelen mellom normalen til linjen som forbinder høyttalerne og observasjonsretningen) når en detektor blir flyttet på en sirkel med radius $r = 1000\text{m}$ rundt høyttalerne.

- c) Vi plasserer en detektor i punktet $r = 1000\text{m}$ og $\theta = 0$. Bestem fase-konstantene $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$ og ϕ_5 slik at intensiteten i dette punktet blir størst mulig.
- d) Vi setter fase-konstantene til høyttaler 1 og høyttaler 5 lik null, $\phi_1 = \phi_5 = 0$, men lar fase-konstanten til de tre midterste høyttalerne variere i tid, $\phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = \omega \cdot t$, der ω er en vinkel-frekvens vi kan endre på. Bestem intensiteten en detektor vil observere i punktet $r = 1000\text{m}$ og $\theta = 0$.

Oppgave 2.

Klassisk energi for en partikkel med masse m i en en-dimensjonal potensial-brønn kan skrives som

$$H(p, x) = \frac{p^2}{2m} + V(x), \quad (1)$$

der p er impulsen, x er posisjonen og $V(x)$ beskriver den potensielle energien i brønnen. Vi antar at brønnen er skarpt definert slik at partikkelen befinner seg innenfor et område fra $x = -a/2$ til $x = a/2$. Det betyr at $V(x) = 0$ inne i brønnen når $-a/2 < x < a/2$ og $V(x) \rightarrow \infty$ utenfor brønnen når $|x| > a/2$.

- a) Vis *kort* hvordan vi ut ifra dette kan finne at den tidsavhengige Schrödinger-ligningen for denne partikkelen blir

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right] \psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t). \quad (2)$$

- b) En partikkel befinner seg i dette potensialet i en tilstand beskrevet av bølgefunksjonen

$$\psi(x, t) = A \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) g(t), \quad (3)$$

når $|x| < a/2$, der $g(t)$ er en ukjent tidsavhengig funksjon, A er en normaliseringskonstant og $\psi(x, t) = 0$ når $|x| > a/2$. Bestem funksjonen $g(t)$ og vis at egen-energien for denne tilstanden er $E = \hbar^2 \pi^2 / (2ma^2)$.

- c) Vi velger en normalisering av den tidsavhengige funksjonen slik at $|g(t)|^2 = 1$. Vis at normaliseringskonstanten er gitt ved

$$A = \sqrt{\frac{2}{a}}. \quad (4)$$

Finn forventningsverdien til posisjonen $\langle x \rangle$ og standardavviket til posisjonen $\Delta x = \sqrt{\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle}$.

- d) Finn forventningsverdien til impulsen $\langle p \rangle$ og standardavviket til impulsen $\Delta p = \sqrt{\langle (p - \langle p \rangle)^2 \rangle}$.

Beregn produktet av uskarpheten i posisjon og uskarpheten i impuls, $(\Delta x)(\Delta p)$, og kommenter om dette er i overensstemmelse med Heisenbergs usikkerhetsrelasjon.

Oppgave 3.

Elektronenes oppførsel i et to-dimensjonalt metall kan modelleres som partikler i en boks som har den samme størrelsen som metallens utstrekning. Vi ser på en kvadratisk metall-bit med sidekant L og et areal L^2 . Den tidsuavhengige Schrödinger-ligningen for en partikkel i metallet er dermed

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Psi(x, y) = E \Psi(x, y), \quad (5)$$

med rand-vilkårene at partikkelen ikke kan befinne seg utenfor boksen, det vil si at

$$\Psi(x, y) = 0 \quad (6)$$

når et av følgende er oppfylt: $x < 0$, $x > L$, $y < 0$, eller $y > L$.

- a) Vis at Schrödinger-ligningen ovenfor gir at tilstanden til partikkelen er bestemt av to kvante-tall n_x , og n_y og at egen-energiene til systemet er

$$E_{n_x, n_y} = E_0 (n_x^2 + n_y^2), \quad (7)$$

der

$$E_0 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}. \quad (8)$$

Hvilke mulige verdier kan kvante-tallene n_x og n_y ha ?

- b) I tillegg til kvante-tallene n_x og n_y vil elektron-tilstanden være bestemt av spinn-kvantetallet m_s som har to mulige verdier, $m_s = 1/2$ eller $m_s = -1/2$.

Angi de seks laveste energi-nivåene til systemet i enheter av E_0 samt antallet tilstander som gir hvert enkelt av disse fem laveste energi-nivåene. Anta at det befinner seg 16 elektroner i systemet. Beskriv hvordan grunntilstanden til 16-elektron-systemet ser ut når temperaturen er ved det absolutte nullpunkt, $T = 0$. Hva blir total-energien for dette 16-elektron systemet?

- c) Hva forstår vi med Fermi-energien til et system? Utled uttrykket

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m} (3n_e \pi^2)^{2/3}, \quad (9)$$

der n_e er elektron-tettheten for en enkel *tre-dimensjonal* metall-modell.

Oppgitt:**Noen integraler som kan være nyttige:**

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n! \quad (n \text{ er et heltall}) \quad (10)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x e^{-x}}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^2}{6} - 1 \quad (11)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3 e^{-x}}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15} \quad (12)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1 + e^x} dx = \ln 2 \quad (13)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\pi} \quad (14)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \quad (15)$$

$$\int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \quad (16)$$

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{1}{4} \sqrt{\pi} \quad (17)$$

$$\int_0^{\infty} x^3 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \quad (18)$$

$$\int_0^{\infty} x^4 e^{-x^2} dx = \frac{3}{8} \sqrt{\pi} \quad (19)$$

$$\int_0^{\infty} x^5 e^{-x^2} dx = 1 \quad (20)$$

$$\int_0^{\infty} x^6 e^{-x^2} dx = \frac{15}{16} \sqrt{\pi} \quad (21)$$

$$\int_0^{\infty} x^7 e^{-x^2} dx = 3 \quad (22)$$

$$\int_0^{\infty} x \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) dx = \frac{a^2}{4} \quad (23)$$