

LØYSNINGAR

Ekamen i SIF 4022 Trykk 2

(1)

2. august 2000

Oppgave 1

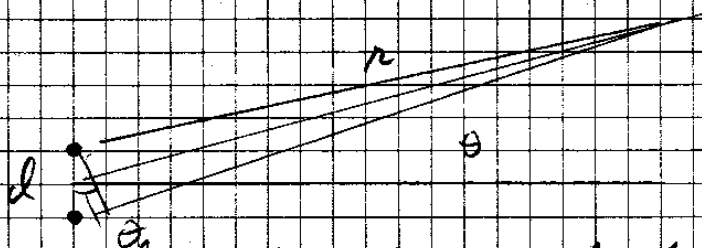
- a) Høytalerene er punktkjelder, og intensiteten varierer som $I = P/r^2$, dvs. effekten P fordeler seg over alle retninger

$$I_1 = P / 4\pi r^2 = \frac{1 \text{ W}}{4\pi \cdot 50^2 \text{ m}^2} = 3,183 \cdot 10^{-5} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

Høregrensa er $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$

$$\beta = 10 \log \left(\frac{I_1}{I_0} \right) = 10 \cdot \log \left(3,183 \cdot 10^{-5} / 10^{-12} \right) = 10 (\log 3,183 + 7) = 10 \cdot 7,503 = \underline{\underline{75 \text{ dB}}}$$

b)



Her er $d \ll r$. Gangvegsforhøvelen for de to høytalerene blir $\Delta r = d \sin \theta$ og resultantamplituden blir

$$E = E_1 + E_2 = E_1 (1 + e^{i\alpha})$$

$$\text{og } I = C \cdot E^2 (1 + e^{i\alpha})(1 + e^{-i\alpha})$$

$$= I_1 (1 + 1 + e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}) = 2I_1 (1 + \cos \alpha)$$

$$= \underline{\underline{4I_1 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}}$$

$$\text{der } \alpha = \varphi + \frac{2\pi \Delta r}{\lambda} = \varphi + 2\pi d \sin \theta / \lambda$$

Wellenlänge

$$\lambda \cdot f = v$$

$$\lambda = 340 / 440 \text{ m} = 0.773 \text{ m}$$

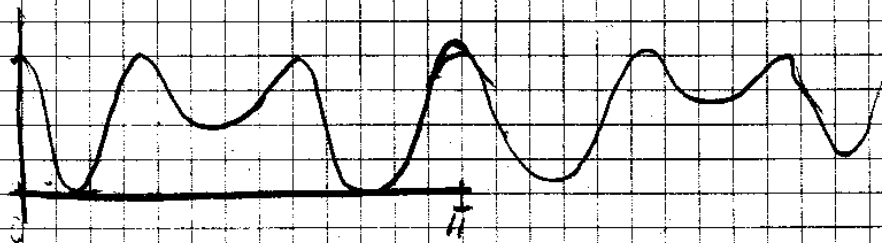
②

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{0.773} \cdot 1 \sin \theta = 4.0642 \sin \theta \quad (\text{rad})$$

$$I = 4I_0 \cos^2 \left(\frac{180}{\pi} \cdot \frac{\pi}{0.773} \cdot 1 \sin \theta \right)$$

$$= 4I_0 \cos^2 (232.86 \sin \theta)$$

Minuten bei



Maxima

$$\frac{\alpha}{2} = \pi \cdot m$$

$$\pi d \sin \theta / \lambda = \pi \cdot m$$

$$\sin \theta = \frac{\lambda}{d} \cdot m = 0.773 \cdot m$$

$$m = 0$$

$$\theta = 0, 180^\circ$$

$$m = \pm 1$$

$$\theta = \pm 50.62^\circ \quad \text{oder} \quad \pm 129.38^\circ$$

∴ 6 Maxima

Bølglængde bl. $\lambda \cdot f = v$

③

$$\lambda = \frac{340}{440} \text{ m} = 0,773 \text{ m}$$

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{2\pi}{0,773} \cdot \frac{1}{2} \sin \theta = 8,131 \sin \theta \quad (\text{rad})$$

$$I = 4I_1 \cos^2(8,131 \cdot \sin \theta)$$

Maks. m. $\frac{\alpha}{2} = \frac{n \cdot \pi}{2}$

Min m. $\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} (2n+1)$

$$\frac{2\pi d \sin \theta}{\lambda} = \pi (2n+1)$$

$$\sin \theta = \frac{\lambda}{2d} (2n+1)$$

$$\theta = 22,74^\circ \quad n=0$$

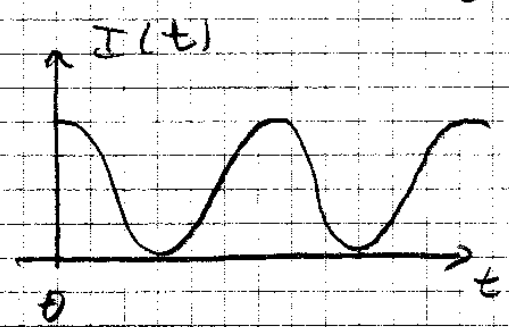
$\sin \theta > 1$ for $n=1$, ikke muligt.

④

c)

$$\alpha = p \cdot t$$

$$I(t) = 4I_1 \cos^2\left(\frac{p \cdot t}{2}\right)$$



Mehr mal: $\frac{p \cdot t}{2} = \pi \cdot n$

$$t = \frac{2\pi}{p} \cdot n$$

$n = \text{Mittelwert}$

Null intensität erreicht: nullum (für $n + \frac{1}{2}$)

Für $\theta = 90^\circ$ bin variieren

$$I(t) = 4I_1 \cos^2\left(\frac{p \cdot t}{2} + \frac{\pi d}{\lambda}\right), \text{ das. same}$$

d) optische Gitterstruktur nach Winkel $\frac{\pi d}{\lambda} \Rightarrow 232.86^\circ$

-
-
-

No. bi. angestrichen

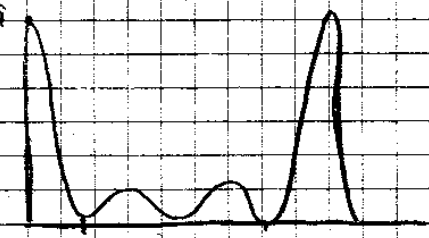
$$E = E_1 (1 + e^{\theta} + e^{-\theta}) = E_1 (1 + 2 \cos \beta)$$

$$\text{den } \beta = 2\pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta / \lambda = \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta$$

$$I = I_1 (1 + 2 \cos \beta)^2$$

$$= I_1 (1 + 4 \cos^2 \beta + 4 \cos \beta)$$

$$= 4I_1 \cos^2 \beta + I_1 (1 + 4 \cos \beta)$$



(für $I = 4I_1 \cos^2 \beta$ für t_0)

(5)

Oppgave 2

a) Schrödingerligninga er eit uttrykk som beskriv tilstanden til eit kvante-mekanisk system. Det kven uttrykket uttrykket klassisk energi for systemet, dvs. sum av kinetisk energi $\frac{p^2}{2m}$ og potensiell energi $U(x)$ ved at knapp p og x er operatørar ved at $p \rightarrow -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$ og $x \rightarrow x$.

$$\text{For } H = \frac{1}{2} \frac{p^2}{m} + \frac{1}{2} k x^2$$

$$\text{for en } p^2 \rightarrow \left(-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$\text{idet } i \cdot i = -1$$

Operatørane verka på tilstandsfunksjonen ψ .

b) Vi må finne $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (A \cdot e^{-ax^2}) &= A \cdot e^{-ax^2} \cdot (-2ax) \\ &= -2Aa \cdot x \cdot e^{-ax^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (A e^{-ax^2}) &= -2Aa [e^{-ax^2} + 2ax^2 e^{-ax^2}] \\ &= -2Aa e^{-ax^2} (1 + 2ax^2) \end{aligned}$$

Set inn

$$-\frac{\hbar^2}{2m} (-2Aa) e^{-ax^2} (1 + 2ax^2) + \frac{1}{2} k x^2 A \cdot e^{-ax^2} = E \cdot A e^{-ax^2}$$

$$\text{Dette gir oss når } \frac{\hbar^2}{2m} a (1 + 2ax^2) + \frac{1}{2} k x^2 = E$$

(6)

For at trykke skal gælde for alle x
 må vi have at

$$\left(-\frac{\hbar^2 a^2}{m} + \frac{1}{2}k \right) x^2 = 0$$

$$\therefore a = \frac{1}{2\hbar} (m\hbar k)^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} \text{D: for vi at } E &= \frac{\hbar^2 a^2}{2m} \\ &= \frac{\hbar^2}{2} \frac{1}{2} \frac{(m\hbar k)^{\frac{1}{2}}}{2m} = \hbar \left(\frac{k}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Det kræver at bølgefunktionen er
 normaliseret

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \psi dx = 1$$

$$\therefore A^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2ax^2} dx = 1$$

$$2A^2 \int_0^{\infty} e^{-2ax^2} dx = 1$$

$$\text{La } 2ax^2 = y^2 \quad x = y/\sqrt{2a}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-y^2} \frac{dy}{\sqrt{2a}} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2a}}$$

$$\therefore A^2 \sqrt{\frac{\pi}{2a}} = 1 \quad \underline{A} = \left(\frac{2a}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} = \underline{\underline{\left(\frac{m\hbar k}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}}}}$$

$$c) \langle x^n \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* x^n \psi dx$$

(7)

Für $n=1$: $\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2} x dx = 0$ p.g.a.
 at primitivem antiderivativum für $x=0$

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2} x^2 dx \\ &= 2 \int_0^{\infty} e^{-2x^2} x^2 dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-y} y^{\frac{1}{2}} dy \frac{1}{(2a)^{3/2}} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{(2a)^{3/2}} \cdot \frac{1}{2} \pi^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{(2a)^3}} \\ \text{mit } a &= \left(\frac{m \hbar^2}{4E} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Für $n=2$ $\langle x \rangle = 0$ wegen $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2} x^3 dx = 0$

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle &= B^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2ax^2} x^4 dx = B^2 \int_0^{\infty} e^{-y} y^2 dy \frac{1}{(2a)^{5/2}} \\ &= \frac{B^2}{(2a)^{5/2}} \cdot \frac{3}{8} \pi^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

d) Elektronen in jüth til å bevæge seg i boksen, dvs. det kan ingen potensiell energi i boksen. Utanfor boksen kan vi tillegge det et potensial som er $U(x) = \infty$ (for både omvendt).

i boksen $H = \frac{1}{2m} p^2 + 0$

Utanfor boksen $H = \quad U(x) = \infty$

Schrödinger-ligning i boksen bl.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi = E \cdot \psi$$

For partikler kan en vandringsbølgeskilling - bølgefunksjon anføres (for hver retning)

$$\psi = A \cdot e^{ikx} + B \cdot e^{-ikx}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = ikA e^{ikx} + ikB e^{-ikx}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -k^2 A e^{ikx} - k^2 B e^{-ikx} = -k^2 (A e^{ikx} + B e^{-ikx}) = -k^2 \psi$$

i: $\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \psi = E \cdot \psi$

eller $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$

Bølgefunksjonen må være null utenfor boksen, i:

for $x=0$ og $x=L$,

$0 = A + B \quad B = -A \quad \therefore \psi = 2iA \sin(kx)$

$0 = A e^{ikL} - A e^{-ikL}$

$\therefore 2iA \sin(kL) = 0$

For $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ $k = \frac{n\pi}{L}$

9
Bølgefunksjonen ψ - stamule bølge i
den bølgevektoren k er kvantiseret

$k = \frac{\pi}{L_1} n$, og egen energi
er kvantiseret

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m L_1^2} \frac{1}{n^2}$$

Fr - elektron - i bølge - modellen sammen
med Pauliprinsippet gir en
god beskrivelse av

spesifikk varmekapasitet

og gir grunnlag for å beskrive
elektriske ledingsverner
termiske ledingsverner

og gir et bra utgangspunkt for
"band - beskrivelse" av elektron i metaller
og halvledere

Opgave 3
a) Bølge ligning for en bølge $f(\vec{r}, t)$

(10)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

Planbølge $f(\vec{r}, t) = F \cdot \exp(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}))$
 $= F \exp(i(\omega t - (k_x x + k_y y + k_z z)))$
 der $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$

Deriverer:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -i\omega f$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -\omega^2 f$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -ik_x F e^{i(\omega t - (k_x x + k_y y + k_z z))} = -ik_x f$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -k_x^2 f$$

Tilsvarende

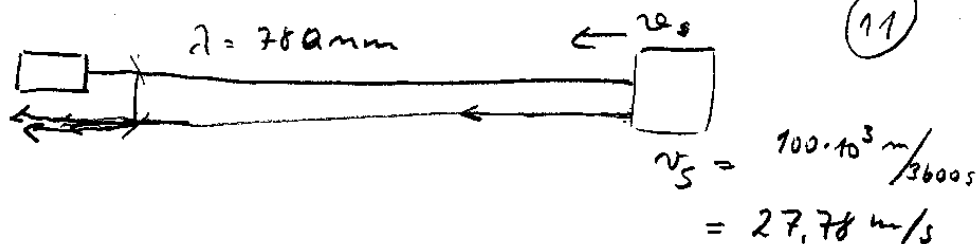
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -k_y^2 f$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -k_z^2 f$$

Set inn: $-(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)f + \frac{\omega^2}{v^2}f = 0$
 $(-k^2 + \frac{\omega^2}{v^2})f = 0$

$\therefore$ Ok når $\underline{\omega = k \cdot v}$ som gjelder
for alle bølger.

b)



Der blir en Doppler-forandring av frekvensen for det reflekterte lyset

$$f_0 = c/\lambda = \frac{3,0 \cdot 10^8}{780 \cdot 10^{-9} \text{ m}} = 3,846 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$$

$$\frac{v_s}{c} = \frac{27,78}{3,0 \cdot 10^8} = 9,26 \cdot 10^{-8} \ll 1$$

Ein kan bruke relativistisk Doppler, men også klassisk beskrivelse er bra nok

$$f' = f_0 / (1 - \frac{v_s}{c}) \approx f_0 (1 + \frac{v_s}{c})$$

Det oppstår avvik mellom de to bølglengdene, med svake frekvenser til

$$f' - f_0 = f_0 \frac{v_s}{c} \quad (f' > f_0)$$

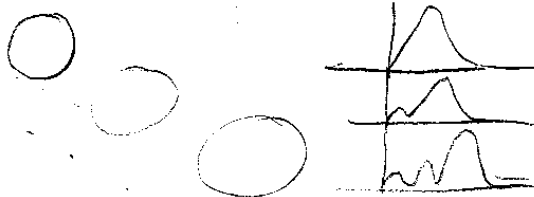
$$= \frac{c}{\lambda} \cdot \frac{v_s}{c} = \frac{v_s}{\lambda} = \frac{27,78}{780 \cdot 10^{-9} \text{ m}} = 3,56 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1}$$

c) s-orbitaler er for bølgefunksjoner med kvantetall l ($l = 0$). De har kulesymmetri

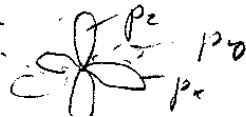
$$n=1 \quad l=0$$

$$n=2 \quad l=0$$

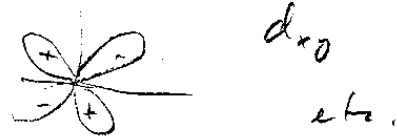
$$n=3 \quad l=0$$



p-orbitaler har $l=1$, er ikke kulesymmetriske, men har utposinger i visse retninger t.d. langs x, y, og z-aksene



d-orbitalen har $l=2$ og har meir kompliserte utformingar (12)



For p- og d-orbitalane er elektronfordelinga meir konsentrert (i utformingane). Kjemiske kvalente bindingar blir dannne ved overlapping mellom orbitalane på atomar som blir bundne saman, og p- og d-orbitalane gjev derfor til sterkare kvalente bindingar enn s-orbitalar (t.d. for karbon: grafitt og diament).

d) - Frekvens-spekter av svart-stråling for faste stoff. Klartvis kjennetegner at strålinga stikk ut i uvikleg sterk for høge frekvensar ("ultrafiolett katastrofe").

- Foto-elektrisk effekt. For i faste stoff med bestråling er det ikkje nok i noen intensiteten av stråling. Frekvensen må vere over ein viss terskel

- Partikkel-stråling (t.d. elektron-strålar og røntgen-strålar) fører til diffraksjons-effekter i krystall-gitter.

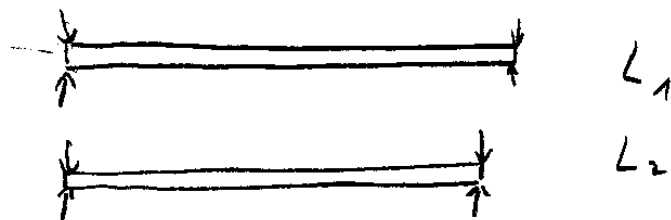
e) Ved frie tilnærning kan elektroner i fast stoff betraktet som en gas av elektroner som følger Pauli-prinsippet og derfor ønsker å gå inn i de laveste ledige tilstand. Denne gassen blir beskriven av bølgefunksjoner som er stående bølger i stoffet. Dersom ein tar vagnen til å stoffet er langstallinsk, vil viss energier (bølge-lengden) bli diffrahert i stoffet, dei vil utgjere forbudne energier ("forbudne band") som skal tillatte energier ("tillatte band"). Avstanden i energi mellom tillatte nivå bli kalla energi-gap E_g .

Dersom der er akkurat nok elektroner i stoffet til å fylle eit tillatt band, bli stoffet elektrisk isolerende. (PVC, glass)

I utsett fall er det eit metall (elektrisk leiende).

Dersom bandgapet E_g ikkje er for stort, kan lihevel enkelte elektroner bli eksitert opp til neste tillatte nivå, og stoffet vil ha ei viss ledingsevne, som vil auker dersom temperaturen aukar. Dette stoffet er halvleiende, som Si, Ge, GaAs, og dei enkelte polymerer som Na, Ca, Fe, Al ...

f)



(14)

Stående bølger blir induisert. Dermed
 vere knutene i endane

$$L_i = \frac{\lambda_i}{2} \cdot n \quad \lambda_i = \frac{2L_i}{n}$$

$n = \text{heile tall.}$

Frekvensar $f_i = v / \lambda_i = \frac{v}{2L_i} \cdot n$

Derfor stasjonære vil vinge med
 ulike frekvensar $f_1 = \frac{4800}{4.00} \cdot n = \underline{\underline{1200 \cdot n \text{ s}^{-1}}}$
 $f_2 = \underline{\underline{1230.8 \cdot n \text{ s}^{-1}}}$

Lydbølger med dei to frekvensane blir
 skapt

Pluss søving mellom dei, som
 vil ha store frekvens $f_2 - f_1 = \underline{\underline{30.8 \cdot n \text{ s}^{-1}}}$
 $n = 1, 2, \dots$