



Løsningsforslag til eksamen i
SIF4022 Fysikk 2
Tirsdag 3. desember 2002

Dette løsningsforslaget er på 6 sider.

Oppgave 1.

- a) Amplituden i avstand r fra en kule-bølge er

$$y(r, t) = \frac{A}{r} \exp i(kr - \omega t + \phi). \quad (1)$$

Den totale effekten som brer seg gjennom et kule-skall er bevart. Arealet av et kule-skall er $4\pi r^2$. Intensiteten i avstand r fra høytaler nummer 2 er derfor

$$I_2(r) = \frac{P}{4\pi r^2} = |y_2(r, t)|^2. \quad (2)$$

Vi velger dermed $A = \sqrt{P/(4\pi)}$. Vi setter inn $P = 1\text{W}$ og $r = 100\text{m}$ og får

$$I(r) = \frac{P}{4\pi r^2} = 0.8 \times 10^{-5} \text{Wm}^{-2}. \quad (3)$$

Nedre hørselsgrense er $I_0 = 10^{-12} \text{Wm}^{-2}$. Lydstyrken i desibel er dermed

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0} = 10 \log \frac{0.8 \times 10^{-5}}{10^{-12}} = 69\text{dB}. \quad (4)$$

- b) Her er avstanden d mellom høytalerne mye mindre enn avstanden r . Avstands-forskjellen mellom høytaler 1 og høytaler 2 og mellom høytaler 2 og høytaler 3 er

$$\Delta r = d \sin \theta. \quad (5)$$

Det resulterer i en relative fase-forskjell p.g.a. gang-avstanden som er

$$\alpha = k\Delta r. \quad (6)$$

Den resulterende amplituden fra de tre høytalerne blir dermed

$$y(r, t) = y_1(r, t) + y_2(r, t) + y_3(r, t) \quad (7)$$

$$= y_2(r, t) [1 + \exp i(\phi_3 - \phi_2 + \alpha) + \exp i(\phi_1 - \phi_2 - \alpha)] \quad (8)$$

$$= \sqrt{\frac{P}{4\pi}} \frac{1}{r} [1 + \exp i(\phi_3 - \phi_2 + kd \sin \theta) + \exp i(\phi_1 - \phi_2 - kd \sin \theta)] \quad (9)$$

Intensiteten er dermed gitt ved

$$I = \frac{P_2}{4\pi r^2} |1 + \exp i(\phi_3 - \phi_2 + kd \sin \theta) + \exp i(\phi_1 - \phi_2 - kd \sin \theta)|^2$$

$$I = \frac{P_2}{4\pi r^2} \times [3 + 2 \cos(\phi_3 - \phi_2 + kd \sin \theta) + 2 \cos(\phi_1 - \phi_2 - kd \sin \theta) + 2 \cos(\phi_3 - \phi_1 + 2kd \sin \theta)]. \quad (11)$$

c) Intensiteten er størst i dette punktet når alle fasene er like, $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3$.

d) Intensiteten er gitt ved

$$I = \frac{P_2}{4\pi r^2} \times [3 + 2 \cos(\phi_3 - \phi_2 + kd \sin \theta) + 2 \cos(\phi_1 - \phi_2 - kd \sin \theta) + 2 \cos(\phi_3 - \phi_1 + 2kd \sin \theta)]. \quad (12)$$

Vi setter inn $\phi_1 = 0 = \phi_3$, $\theta = 0$ og bruker $P/(4\pi r^2) = 3.2 \times 10^{-5} \text{ W m}^{-2}$ og får

$$I = 1.6 \times 10^{-4} [1 + \frac{4}{5} \cos(\omega t)] \quad (13)$$

Oppgave 2.

a) Schrödinger-ligningen er gitt ved

$$H(p_{\text{op}}, x)\psi(x, t) = E_{\text{op}} = \psi(x, t). \quad (14)$$

Impuls-operatoren er

$$p_{\text{op}} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}. \quad (15)$$

og energi-operatoren er

$$E_{\text{op}} = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t}, \quad (16)$$

og innsatt gir dette Schrödinger-ligningen vi skulle vise.

b) Separasjon av variable

$$\psi(x, t) = \Psi \exp(-if(t)) \quad (17)$$

gir den tidsuavhengige Schrödinger-ligningen

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} kx^2 \right] \Psi(x) = E \Psi(x). \quad (18)$$

og ligningen for den tidsavhengige funksjonen $f(t)$:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \exp(-if(t)) = E \exp(-if(t)). \quad (19)$$

Løsningen er dermed

$$f(t) = \frac{E}{\hbar} t. \quad (20)$$

Vi bestemmer så egen-energien E fra den tidsuavhengige Schrödinger-ligningen. Den første deriverte av bølgefunksjonen er

$$\frac{d}{dx} \Psi(x) = -\frac{1}{\hbar} \sqrt{mkx} \Psi(x). \quad (21)$$

Den andre-deriverte av bølgefunksjonen er

$$\frac{d^2}{dx^2} \Psi(x) = \left[-\frac{1}{\hbar} \sqrt{mk} + \frac{1}{\hbar^2} mkx^2 \right] \Psi(x). \quad (22)$$

Den tidsuavhengige Schrödinger-ligningen gir dermed

$$\begin{aligned} H(p_{\text{op}}, x)\Psi(x) &= \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(-\frac{1}{\hbar}\sqrt{mk} + \frac{1}{\hbar^2}mkx^2 \right) + \frac{1}{2}kx^2 \right] \Psi(x) \\ &= \frac{1}{2}\hbar\sqrt{k/m}\Psi(x) \end{aligned} \quad (23)$$

$$= E\Psi(x) \quad (24)$$

Vi identifiserer $\omega = k/m$ og har dermed funnet at egen-energien er $E = \hbar\omega/2$.

c) Forventnings-verdien til posisjonen er

$$\langle x(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x, t)x\psi(x, t)dx \quad (25)$$

$$\langle x(t) \rangle = \left(\frac{mk}{\pi^2\hbar^2}\right)^{1/4} \int_{-\infty}^{\infty} x \exp\left(-\frac{1}{\hbar}\sqrt{mk}x^2\right) \quad (26)$$

$$(27)$$

Vi ser da at $\langle x(t) \rangle = 0$ ved symmetri. Fluktuasjonene i posisjonen er gitt ved

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x, t)x^2\psi(x, t)dx \quad (28)$$

$$\langle x^2 \rangle = \left(\frac{mk}{\pi^2\hbar^2}\right)^{1/4} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp\left(-\frac{1}{\hbar}\sqrt{mk}x^2\right)dx \quad (29)$$

$$(30)$$

Vi substituerer $u = (mk)^{1/4}/\hbar^{1/2}$ og får

$$\langle x^2 \rangle = \left(\frac{mk}{\pi^2\hbar^2}\right)^{1/4} \left(\frac{\sqrt{mk}}{\hbar}\right)^{-3/2} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 \exp(-u^2)du \quad (31)$$

$$\langle x^2 \rangle = \left(\frac{mk}{\pi^2\hbar^2}\right)^{1/4} \left(\frac{\sqrt{mk}}{\hbar}\right)^{-3/2} \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \quad (32)$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{2}\hbar\frac{1}{\sqrt{mk}}. \quad (33)$$

Dette gir

$$\Delta x = \left(\frac{1}{2}\hbar\frac{1}{\sqrt{mk}}\right)^{1/2}. \quad (34)$$

d) Impuls-operatoren er $p_{\text{op}} = (\hbar/i)\partial/\partial x$. Vi finner først

$$p_{\text{op}}\Psi = i\sqrt{mk}x\Psi. \quad (35)$$

Ved symmetry ser vi dat at

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x, t) p_{\text{op}} \psi(x, t) = 0. \quad (36)$$

Ved delvis integrasjon finner vi

$$\langle p^2 \rangle = -\hbar^2 \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x) \frac{d^2}{dx^2} \Psi(x) \quad (37)$$

$$\langle p^2 \rangle = \hbar^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d}{dx} \Psi(x) \right)^2 \quad (38)$$

$$\langle p^2 \rangle = mk \langle x^2 \rangle \quad (39)$$

$$\langle p^2 \rangle = \frac{1}{2} \hbar \sqrt{mk} \quad (40)$$

Dette gir

$$\Delta p = \left(\frac{1}{2} \hbar \sqrt{mk} \right)^{1/2}. \quad (41)$$

Produkter av uskarphetene blir dermed

$$(\Delta x)(\Delta p) = \frac{1}{2} \hbar. \quad (42)$$

Heisenbergs usikkerhetsrelasjon er

$$(\Delta x)(\Delta p) \geq \frac{1}{2} \hbar. \quad (43)$$

Denne tilstanden gir dermed den nedre grensen for denne uskarpheten.

Oppgave 3.

a) Bølgefunksjonen som tilfredstiller rand-vilkårene blir

$$\Psi(x, y, z) = \sin \frac{\pi n_x}{L} \sin \frac{\pi n_y}{L} \sin \frac{\pi n_z}{L} \quad (44)$$

Innsatt gir dette egen-energien

$$E_{n_x, n_y, n_z} = E_0 (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2), \quad (45)$$

der

$$E_0 = \frac{\hbar^2}{2mL^2}. \quad (46)$$

Tilstand	Energi (E_0)	Degenerasjon
111	3	2
211	6	6
221	9	6
311	11	6
222	12	2

b) Energi-nivåene og degenerasjons-graden blir

Når vi har 14 elektroner er grunntilstanden slik at 2 av disse har energien $3E_0$, 6 har energien $6E_0$ og 6 har energien $9E_0$. Total-energien er dermed $2 \cdot 3E_0 + 6 \cdot 6E_0 + 6 \cdot 9E_0 = 96E_0$.

c) Fermi-energien er maksimal-energien til en partikkel ved det absolutte null-punkt for et mange-fermion system.

Antall elektroner i systemet er

$$N = \int_0^{E_F} g(E) dE = \frac{\pi}{2E_0^{3/2}} \frac{3}{2} E_F^{3/2}. \quad (47)$$

Vi vet også at antall partikler er $N = n_e L^3$. Dermed blir

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m} (3n_e \pi^2)^{2/3}, \quad (48)$$