



**Løsningsforslag til eksamen i**  
**SIF4022 Fysikk 2**  
 Onsdag 13. august 2003

Dette løsningsforslaget er på 5 sider.

**Oppgave 1.**

- a) Amplituden i avstand  $r$  fra en kule-bølge er

$$y(r, t) = \frac{A}{r} \exp i(kr - \omega t + \phi). \quad (1)$$

Den totale effekten som brer seg gjennom et kule-skall er bevart. Arealet av et kule-skall er  $4\pi r^2$ . Intensiteten i avstand  $r$  fra høytaler nummer 3 er derfor

$$I_3(r) = \frac{P}{4\pi r^2} = |y_3(r, t)|^2. \quad (2)$$

Vi velger dermed  $A = \sqrt{P/(4\pi)}$ . Vi setter inn  $P = 10\text{W}$  og  $r = 1000\text{m}$  og får

$$I(r) = \frac{P}{4\pi r^2} = 0.8 \times 10^{-6} \text{Wm}^{-2}. \quad (3)$$

Nedre hørselsgrense er  $I_0 = 10^{-12} \text{Wm}^{-2}$ . Lydstyrken i desibel er dermed

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0} = 10 \log \frac{0.8 \times 10^{-6}}{10^{-12}} = 59\text{dB}. \quad (4)$$

- b) Her er avstanden  $d$  mellom høytalerne mye mindre enn avstanden  $r$ . Avstands-forskjellen mellom høytaler 1 og høytaler 2, mellom høytaler 2 og høytaler 3, mellom høytaler 3 og 4, og mellom høytaler 4 og 5 er

$$\Delta r = d \sin \theta. \quad (5)$$

Det resulterer i en relative fase-forskjell p.g.a. gang-avstanden som er

$$\alpha = k \Delta r. \quad (6)$$

Den resulterende amplituden fra de fem høytalerne blir dermed

$$y(r, t) = y_1(r, t) + y_2(r, t) + y_3(r, t) + y_4(r, t) + y_5(r, t) \quad (7)$$

$$= y_3(r, t) \left[ e^{i(\phi_5 - \phi_3 + 2\alpha)} + e^{i(\phi_4 - \phi_3 + \alpha)} + 1 + e^{i(\phi_2 - \phi_3 - \alpha)} + e^{i(\phi_1 - \phi_3 - 2\alpha)} \right]. \quad (8)$$

Intensiteten er dermed gitt ved

$$I = |y(t)|^2 \quad (9)$$

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} \times [5 + 2 \cos(\phi_5 - \phi_1 + 4kd \sin \theta) + 2 \cos(\phi_5 - \phi_2 + 3kd \sin \theta) + 2 \cos(\phi_4 - \phi_1 + 3kd \sin \theta) + 2 \cos(\phi_5 - \phi_3 + 2kd \sin \theta) + 2 \cos(\phi_4 - \phi_2 + 2kd \sin \theta) + 2 \cos(\phi_3 - \phi_1 + 2kd \sin \theta) + 2 \cos(\phi_5 - \phi_4 + kd \sin \theta) + 2 \cos(\phi_4 - \phi_3 + kd \sin \theta) + 2 \cos(\phi_3 - \phi_2 + kd \sin \theta) + 2 \cos(\phi_2 - \phi_1 + kd \sin \theta)] \quad (10)$$

c) Intensiteten er størst i dette punktet når alle fasene er like,  $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = \phi_5$ .

d) Vi setter inn  $\phi_1 = 0 = \phi_5$ ,  $\phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = \omega t$ ,  $\theta = 0$  og bruker  $P/(4\pi r^2) = 0.8 \times 10^{-6} \text{Wm}^{-2}$  og får

$$I = 0.8 \times 10^{-6} [13 + 12 \cos(\omega t)] \quad (11)$$

## Oppgave 2.

a) Schrödinger-ligningen er gitt ved

$$H(p_{\text{op}}, x)\psi(x, t) = E_{\text{op}} = \psi(x, t), \quad (12)$$

der Hamilton-funksjonen (energi-funksjonen) er gitt ved

$$H(p_{\text{op}}, x) = \frac{p_{\text{op}}^2}{2m} + V(x), \quad (13)$$

og  $V(x)$  er den potensielle energien. Impuls-operatoren er

$$p_{\text{op}} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}. \quad (14)$$

og energi-operatoren er

$$E_{\text{op}} = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t}, \quad (15)$$

og innsatt gir dette Schrödinger-ligningen vi skulle vise.

b) Separasjon av variable

$$\psi(x, t) = \Psi g(t) \quad (16)$$

gir den tidsuavhengige Schrödinger-ligningen

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right] \Psi(x) = E \Psi(x). \quad (17)$$

og ligningen for den tidsavhengige funksjonen  $f(t)$  :

$$i\hbar \frac{d}{dt} g(t) = E g(t). \quad (18)$$

Løsningen er dermed

$$g(t) = \exp -i \frac{E}{\hbar} t. \quad (19)$$

Vi bestemmer så egen-energien  $E$  fra den tidsuavhengige Schrödinger-ligningen. Den første deriverte av bølgefunksjonen er

$$\frac{d}{dx} \Psi(x) = -A \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi x}{a}. \quad (20)$$

Den andre-deriverte av bølgefunksjonen er

$$\frac{d^2}{dx^2} \Psi(x) = -\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \Psi(x). \quad (21)$$

Den tidsuavhengige Schrödinger-ligningen gir dermed

$$H(p_{\text{op}}, x) \Psi(x) = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} \Psi(x) \quad (22)$$

$$= E \Psi(x) \quad (23)$$

Vi har dermed funnet at egen-energien er

$$E = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}. \quad (24)$$

c) Normalisering gir betingelsen

$$\int_{-a/2}^{a/2} dx |\Psi(x)|^2 = 1. \quad (25)$$

Vi finner dermed

$$1 = A^2 \int_{-a/2}^{a/2} dx \cos^2 \frac{\pi x}{a} = A^2 \frac{a}{2} \quad (26)$$

slik at

$$A = \sqrt{\frac{2}{a}}. \quad (27)$$

Forventnings-verdien til posisjonen er

$$\langle x \rangle = \int_{-a/2}^{a/2} \Psi^*(x) x \Psi(x) dx \quad (28)$$

$$\langle x(t) \rangle = \frac{2}{a} \int_{-a/2}^{a/2} dx x \cos^2 \frac{\pi x}{a} \quad (29)$$

Vi ser da at  $\langle x \rangle = 0$  ved symmetri. Fluktuasjonene i posisjonen er gitt ved

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-a/2}^{a/2} \Psi^*(x) x^2 \Psi(x) dx \quad (30)$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{2}{a} \int_{-a/2}^{a/2} dx x^2 \cos^2 \frac{\pi x}{a} \quad (31)$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\pi^2 - 6}{12\pi^2} a^2 \quad (32)$$

Dette gir

$$\Delta x = a \sqrt{\frac{\pi^2 - 6}{12\pi^2}}. \quad (33)$$

d) Impuls-operatoren er  $p_{\text{op}} = (\hbar/i)\partial/\partial x$ . Forventningsverdien av impuls-operatoren er

$$\langle p \rangle = \int_{-a/2}^{a/2} dx \psi^*(x, t) p_{\text{op}} \psi(x, t) = 0. \quad (34)$$

Fluktuasjonene er gitt ved

$$\langle p^2 \rangle = -\hbar^2 \int_{-a/2}^{a/2} dx \Psi(x) \frac{d^2}{dx^2} \Psi(x) \quad (35)$$

$$\langle p^2 \rangle = \left(\frac{\hbar\pi}{a}\right)^2 \quad (36)$$

Dette gir

$$\Delta p = \frac{\hbar\pi}{a} \quad (37)$$

Produkter av uskarphetene blir dermed

$$(\Delta x)(\Delta p) = \sqrt{\frac{\pi^2 - 6}{12}} \hbar \approx 0.57\hbar. \quad (38)$$

Heisenbergs usikkerhetsrelasjon er

$$(\Delta x)(\Delta p) \geq \frac{1}{2}\hbar. \quad (39)$$

Denne tilstanden er derfor i overensstemmelse med Heisenbergs usikkerhetsrelasjon.

### Oppgave 3.

a) Bølgefunksjonen som tilfredstiller rand-vilkårene blir

$$\Psi(x, y, z) = \sin \frac{\pi n_x}{L} \sin \frac{\pi n_y}{L} \quad (40)$$

Innsatt gir dette egen-energien

$$E_{n_x, n_y, n_z} = E_0 (n_x^2 + n_y^2), \quad (41)$$

der

$$E_0 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}. \quad (42)$$

b) Energi-nivåene og degenerasjons-graden blir som vist i tabellen nedenfor.

Når vi har 16 elektroner er grunntilstanden slik at 2 av disse har energien  $2E_0$ , 4 har energien  $5E_0$ , 2 har energien  $8E_0$ , 4 har energien  $10E_0$ , og 4 har energien  $E_0$ . Total-energien er dermed  $2 \cdot 2E_0 + 4 \cdot 5E_0 + 2 \cdot 8E_0 + 4 \cdot 10E_0 + 4 \cdot 13E_0 = 132E_0$ .

| Tilstand | Energi ( $E_0$ ) | Degenerasjon |
|----------|------------------|--------------|
| 11       | 2                | 2            |
| 21       | 5                | 4            |
| 22       | 8                | 2            |
| 31       | 10               | 4            |
| 32       | 13               | 4            |
| 41       | 17               | 2            |

- c) Fermi-energien er maksimal-energien til en partikkel ved det absolutte null-punkt for et mange-fermion system.

Antall elektroner i systemet er

$$N = \int_0^{E_F} g(E) dE = \frac{\pi}{2E_0^{3/2}} \frac{3}{2} E_F^{3/2}. \quad (43)$$

Vi vet også at antall partikler er  $N = n_e L^3$ . Dermed blir

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m} (3n_e \pi^2)^{2/3}, \quad (44)$$