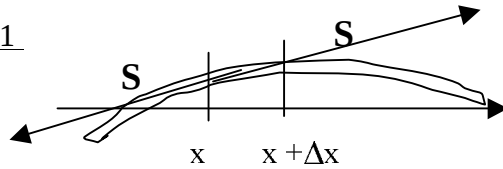


Oppgave 1

a)



Masse $\mu \cdot \Delta x$ Akselerasjon $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

Kraft opp:

$$\begin{aligned} & S \cdot \sin \alpha(x + \Delta x) - S \sin \alpha(x) \\ &= S(\alpha(x + \Delta x)) = S \left(\frac{dy}{dx}(x + \Delta x) - \frac{dy}{dx}(x) \right) \\ &= S \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \Delta x \end{aligned}$$

Newtons 2. lov

$$S \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \Delta x = \mu \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

gir

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\mu}{S} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

som er bøljelikninga, av form

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \text{ med } v = \text{bølgjefart som krever}$$

$$v = \sqrt{\frac{S}{\mu}}$$

b)
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi = 0$$

Harmonisk planbølge

$$\begin{aligned}\psi &= A e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi)} \\ &= A e^{i(\omega t - (k_x x + k_y y + k_z z) + \phi)}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\omega^2 \psi$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -i k_x \cdot \psi$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -k_x^2 \cdot \psi, \text{ tilsvarende for } \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \text{ og } \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

$$-\frac{(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)}{k^2} \psi + \frac{1}{v^2} \omega^2 \psi = 0$$

$$\underline{\underline{): \text{ Stemmer når } \omega = k \cdot v}}$$

Harmonisk kulebølge

$$\psi = \frac{A}{r} e^{i(\omega t - kr + \phi)}$$

Vi bruker kulekoordinatar (Rottmann)

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)$$

Her avheng ψ berre av r , ikkje av polarvinklane ϕ og θ):

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right)$$

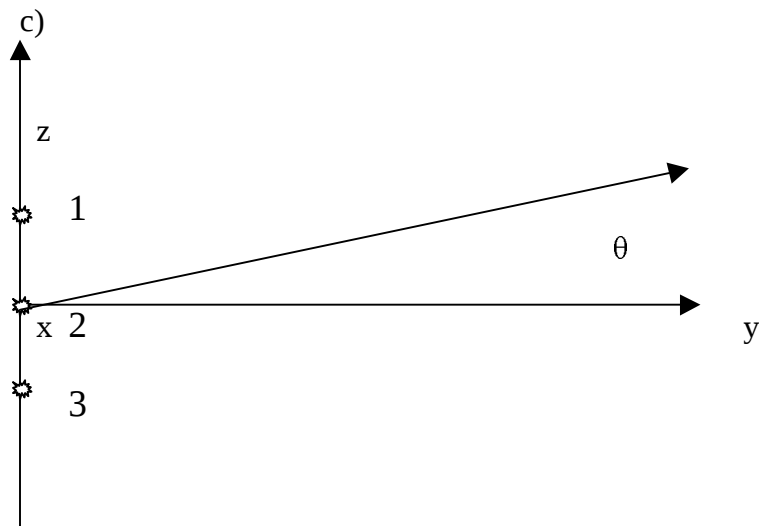
$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi}{\partial r} &= A \cdot \frac{(r(-ik) \cdot e^{i(\omega t - kr + \phi)} - e^{i(\omega t - kr - \phi)})}{r^2} \\ &= (-ik)\psi - \psi / r\end{aligned}$$

$$r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} = -ikr^2 \psi - r\psi$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) &= -ik \left(2r\psi + r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \psi - r \frac{\partial \psi}{\partial r} \\ &= -ik \left(2r\psi - r^2 ik \psi - r^2 \frac{\psi}{r} \right) - \psi + ik r \psi + \psi \\ &= -ik(2r\psi - r\psi - r\psi) - k^2 \psi = -k^2 \psi\end{aligned}$$

$$): -k^2 \psi - \frac{1}{v^2} (-\omega^2) \psi = 0$$

ok når $\omega = k \cdot v$!



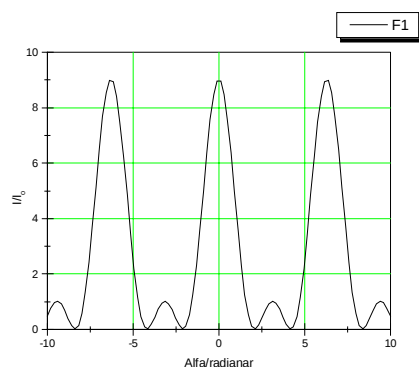
Intensiteten vil ikkje avhenge av retninga φ i x-y-planet.

For retningar ξ med z-aksen (θ med xy-planet der $\xi + \theta = \pi/2$):

$$\begin{aligned}\psi_{res} &= \psi_1(r_1) + \psi_2(r_2) + \psi_3(r_3) \\ &= A e^{i\alpha x} \left(\frac{1}{r_1} e^{-ikr_1} + \frac{1}{r_2} e^{-ikr_2} + \frac{1}{r_3} e^{-ikr_3} \right) \\ &= \frac{A}{r} e^{i(\alpha x - kr_2)} \left(e^{-ik(r_1 - r_2)} + 1 + e^{-ik(r_3 - r_2)} \right) \\ &= \frac{A}{r} e^{i(\alpha x - kr_2)} (1 + 2 \cos \alpha)\end{aligned}$$

$$\text{der } \alpha = k \cdot \Delta r = k \cdot d \sin \theta$$

$$I = \frac{A^2}{r^2} (1 + 2 \cos \alpha)^2$$



Det blir sterke og svake striper (i forholdet 9 : 1) parallelt med x-y planet med null-intensitet imellom.

c) Ein finn at intensiteten er

$$I = I_0 \left(\frac{\sin N\alpha}{\sin \alpha} \right)^2$$

der $\alpha = \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta$

der $d = 2 \cdot 10^{-3} \text{ mm} = 2000 \text{ nm}$. $\lambda = 589 \text{ nm}$

Der blir maksima når $n \cdot \lambda = d \sin \theta$

$\sin \theta = n \frac{\lambda}{d}$; $n = \text{heile tall}$

Toppene har ei breidd på $\frac{\pi}{N} = \frac{180}{500} = 0,36^\circ$ der N er totalt antall spalter.

Dei to bølgjelengdene er oppløyste frå kvarandre når

$$|\theta_1 - \theta_2| \geq \frac{\pi}{N}$$

$n = 0$ $\theta_1 = \theta_2 = 0$

$n = 1$ $\sin \theta_1 = \frac{588}{2000}$; $\theta_1 = 17.098$

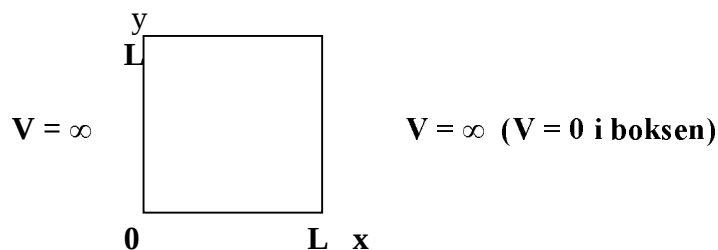
$\sin \theta_2 = \frac{599}{2000}$; $\theta_2 = 17.428$ $\Delta \theta = 0.33^\circ$

$n = 2$ $\theta_1 = 36.015^\circ$ $\Delta \theta = 0.78^\circ$
 $\theta_2 = 36.798^\circ > 0.36^\circ$

Retninga er rundt 36.4° , ein topp på kvar side, med ulike bølgjelengder.

Oppgave 2

a) Ser på eit todimensjonalt tilfelle:



Schrödingerlikninga

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + (U(x, y) - E) \right] \psi = 0$$

der $U(x, y) = 0$ for $0 < x < L$ og $0 < y < L$.
 $= \infty$ ellers

Separabel: $\psi = \psi_1(x) \cdot \psi_2(y)$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \psi_2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \psi_1 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2}$$

I boksen:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\psi_2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \psi_1 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} \right) - E \cdot \psi_1 \psi_2 = 0$$

eller

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi_1} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} = E + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi_1} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2}$$

$= \text{konsstant} = C$

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} = C \cdot \psi_1$$

Av form $\psi_1 = A(e^{ikx} \pm e^{-ikx})$

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} = -k^2 \psi_1 \quad); \quad C' = k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} C$$

$$); \quad C = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

Grensekraav

$\psi(0) = \psi(L) = 0$ krev - teiknet.

$$e^{ikL} = e^{-ikL}); \quad e^{2ikL} = 1$$

$$2kL = 2\pi \cdot n_1$$

$$k = \pi/L \cdot n_1 \quad n_1 = 1, 2, 3, \dots$$

$$C = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} n_1^2$$

a)
$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi_2} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} = C - E = C''$$

som på same vis krev

$$\psi_2 = B(e^{iky} - e^{-iky})$$

og

$$C'' = -\frac{\eta^2}{2m} \frac{\pi^2}{L^2} \cdot n_2^2 \quad n_2 = 1, 2, 3, \dots$$

b) Læreboka

$$c) \quad \underline{\underline{E = C + C'' = \frac{\eta^2}{2m} \frac{\pi^2}{L^2} (n_1^2 + n_2^2) = E_0 (n_1^2 + n_2^2)}}$$

For tre dimensjoner; generalisering:

$$E = E_0 (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)$$

$$E_0 = \frac{\eta^2}{2m} \frac{\pi^2}{L^2} = 3.73 \text{ eV}$$

$$E_1 = 3 \cdot E_0 = \underline{\underline{11.19 \text{ eV}}}$$

$$E_2 \text{ med } n_1 = 1 \quad n_2 = 2 \quad n_3 = 2$$

$$E_2 = 6 \cdot E_0 = \underline{\underline{22.38 \text{ eV}}} \quad (\text{eksitert}).$$

$$\text{Fermienergien } E_F = \frac{\eta^2}{2m} \left(\frac{3\pi^2 n_e}{4} \right)^{2/3}$$

$9.57 \cdot 10^{18}$

$$n_e = 1/10^{-9.3} \text{ m}^3 = 10^{27} \text{ m}^{-3}$$

$$E_F = 5.791 \cdot 10^{-68} \cdot 10^{31} \cdot 10^{18} \text{ J} = \underline{\underline{3.615 \text{ eV}}}$$

Desse verdiane er nokså ulike. Energi for partikkel i liten boks er større enn i stor boks.

d) Kvantemekanisk er det endelig sannsyn for at ein partikkel kan gå gjennom ein energibarriere som har energi større enn partikkelenergien.

Oppgave 3.

a) Elektronstrålar har bølgekarakter etter de Broglies formel $\lambda = h/(mv)$ der v er farten.

Elektronet får ein kinetisk energi $\frac{1}{2}mv^2 = \text{eV}$ ved akselerasjonen som gir

$$mv = (2meV)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (2 \cdot 9.11 \cdot 10^{-31} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^2)^{\frac{1}{2}} \text{ kg m/s}$$

$$= 5.40 \cdot 10^{-24} \text{ kg m/s.}$$

$$\lambda = 6.63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s/m V}$$

$$= 1.22 \cdot 10^{-10} \text{ m} = \underline{0.122 \text{ nm}}$$

$$\text{Braggs lov} \quad 2d \sin \theta = n\lambda$$

$$\sin \theta = \frac{n\lambda}{2d} = n \cdot 0.339$$

$$\theta_1 = 0 \quad (\text{rett fram})$$

$$\theta_2 = 19.82^\circ$$

$$\theta_3 = 42.69^\circ$$

$$\sin \theta_3 > 1$$

$$\text{Avbøying } 2\theta_1 = 39.63^\circ$$

$$\text{Avbøying } 2\theta_2 = 85.38^\circ$$

ikkje mulig

b) For $n = 1$ (grunntilstanden) er bølgefunksjonen kulesymmetrisk, og har form

$$\psi(r) = N_1 e^{-pr}$$

Vi kallar den for eit 1s-orbital.

Det er plass til to elektron, spinn $s = \pm \frac{1}{2}$.

Kvantetallet for banespinn $\lambda = 0$, og det magnetiske kvantetallet er $\mu_\lambda = 0$.

For $n = 2$ kan λ ta verdiane $\lambda = 0, 1$. For $\lambda = 0$ er orbitalen igjen kulesymmetrisk, kalla 2s, med plass til to elektron.

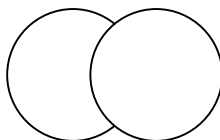
$$\psi(r) = N_2 \cdot F(r) \cdot e^{-p_2 r}$$

For $\lambda = 1$ er det tre orbitalar, kalla 2p, p_x p_y p_z , retta langs tre ortogonale retningar, svarande til $m_\lambda = -1, 0$ og $+1$.

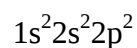
Dei er av form

$$x \cdot e^{-p_2 r}, \quad y e^{-p_2 r} \quad \text{og} \quad z e^{-p_2 r}$$

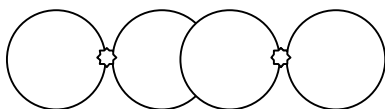
Når hydrogenet dannar kovalent binding til hydrogen-molekylet, er det 1s-orbitalane som overlappar og dannar ei stabil binding ved at der er elektron-fordeling i rommet mellom atoma.



Andre atom har elektron-konfigurasjon som H-atomet, men har flere elektron f.eks. karbon C har 6



p-orbitalane er veleigna til å danne sterke bindingar, fordi dei er retta i bestemte retningar.



Karbon kovalente bindingar er blant dei sterkaste i naturen.

c)

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt f(t) \cdot e^{i\omega t} \\ &= A \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(t-t_0)^2} e^{i\omega t} dt \end{aligned}$$

$$T \text{ a } T = t - t_0 \quad dt = dT$$

$$F(\omega) = A \cdot e^{i\omega t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-aT^2} e^{i\omega T} dT$$

Integralet finst i Rottmann

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$$

$$\text{Halvverdi } \Delta t \text{ av } f(t): \quad \Delta t = 2 \sqrt{\ln 2 / a}$$

$$\text{Halvverdi } \Delta \omega \text{ av } F(\omega) \quad \Delta \omega = 2 \sqrt{4a \ln 2}$$

$$\underline{\underline{\Delta \omega \cdot \Delta t = 8 \ln 2 = 5.55 \leq 2\pi}}$$

d)

Ståande bølger

$$L = \frac{\lambda}{2} \quad); \quad f = v / \lambda = \frac{v}{2L}$$

$$f_1 = \frac{5300}{2} \text{ s}^{-1} = \underline{2650 \text{ Hz}}$$

$$f_2 = \frac{5300}{2 \cdot 0.99} \text{ s}^{-1} = \underline{2677 \text{ Hz}}$$

Ein vil observere desse to frekvensane men også svevinga mellom dei, med svevefrekvens 27 Hz.

e)

Ei-spalte-diffraksjon

$$I = I_0 (\sin \alpha / \alpha)^2$$

$$I = 0 \text{ når } \alpha = n\pi \quad): \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} = n\pi$$

$$\sin \theta = \frac{\lambda}{d} \cdot n$$

Første mørke punkt når $n = 1$

$$\sin \theta = \frac{\lambda}{d} \quad \text{der } \theta = 10.2^\circ$$

$$): d = \frac{\lambda}{\sin \theta} = \underline{\underline{2.88 \mu\text{m}}}$$

e) Dele spalta inn i N smådelar, med opning $d' = \frac{d}{N}$. Det gir mangebølgeinterferens

$$I = I_0 \left(\frac{\sin \left(\frac{N\phi}{2} \right)}{\sin \left(\frac{\phi}{2} \right)} \right)^2 \quad \text{med } \phi = \frac{2\pi d' \sin \theta}{\lambda} = 2\pi d \sin \theta / (\lambda \cdot N). \text{ Når } N \rightarrow \infty, \phi \rightarrow 0 \text{ og}$$

$$\frac{N\phi}{2} = 2\pi d \sin \theta / \lambda \quad): \quad I = NI_0 \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \text{ idet}$$

$$\sin \left(\frac{\phi}{2} \right) \rightarrow \sin(\pi d \sin \theta / \lambda \cdot N) \rightarrow \pi d \sin \theta / \lambda \cdot N$$

der $\alpha = \pi d \sin \theta / \lambda$.

I_0 er intensitet frå kvar enkel tenkt opning.

$NI_0 = I_{\text{tot}}^0$ = intensitet rett fram (for $\theta = 0, \alpha = 0$)