



Løsningsforslag til eksamen i
TFY4170 Fysikk 2
 12. august 2004

Dette løsningsforslaget er på 7 sider.

Oppgave 1. Interferens

- a) Amplituden i avstand r fra en kule-bølge er

$$y(r, t) = \frac{A}{r} \exp i(kr - \omega t + \phi). \quad (1)$$

Den totale effekten som brer seg gjennom et kule-skall er bevart. Arealet av et kule-skall er $4\pi r^2$. Intensiteten i avstand r fra høytaler nummer 2 er derfor

$$I_2(r) = \frac{P_2}{4\pi r^2} = |y_2(r, t)|^2. \quad (2)$$

Vi velger dermed $A_2 = \sqrt{P_2/(4\pi)}$. Vi setter inn $P_2 = 1\text{W}$ og $r = 100\text{m}$ og får

$$I(r) = \frac{P_2}{4\pi r^2} = 0.8 \times 10^{-5} \text{Wm}^{-2}. \quad (3)$$

Nedre hørselsgrense er $I_0 = 10^{-12} \text{Wm}^{-2}$. Lydstyrken i desibel er dermed

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0} = 10 \log \frac{0.8 \times 10^{-5}}{10^{-12}} = 69\text{dB}. \quad (4)$$

- b) Her er avstanden d mellom høytalerne mye mindre enn avstanden r . Avstands-forskjellen mellom høytaler 1 og høytaler 2 og mellom høytaler 2 og høytaler 3 er

$$\Delta r = d \sin \theta. \quad (5)$$

Det resulterer i en relative fase-forskjell p.g.a. gang-avstanden som er

$$\alpha = k \Delta r. \quad (6)$$

Den resulterende amplituden fra de tre høytalerne blir dermed

$$y(r, t) = y_1(r, t) + y_2(r, t) + y_3(r, t) \quad (7)$$

$$= y_2(r, t) \left[1 + \sqrt{\frac{P_3}{P_2}} e^{i(\phi_3 - \phi_2 + \alpha)} + \sqrt{\frac{P_1}{P_2}} e^{i(\phi_1 - \phi_2 - \alpha)} \right] \quad (8)$$

$$= \sqrt{\frac{P_2}{4\pi}} \frac{1}{r} \left[1 + 4e^{i(\phi_3 - \phi_2 + kd \sin \theta)} + \frac{1}{4} e^{i(\phi_1 - \phi_2 - kd \sin \theta)} \right]. \quad (9)$$

Intensiteten er dermed gitt ved

$$I = \frac{P_2}{4\pi r^2} \left| 1 + 4e^{i(\phi_3 - \phi_2 + kd \sin \theta)} + \frac{1}{4}e^{i(\phi_1 - \phi_2 - kd \sin \theta)} \right|^2 \quad (10)$$

$$I = \frac{P_2}{4\pi r^2} \times \left[\frac{273}{16} + 8 \cos(\phi_3 - \phi_2 + kd \sin \theta) + \frac{1}{2} \cos(\phi_1 - \phi_2 - kd \sin \theta) + 2 \cos(\phi_3 - \phi_1 + 2kd \sin \theta) \right]. \quad (11)$$

Vi setter nå fasene like hverandre. Intensiteten forenkles dermed til

$$I = \frac{P_2}{4\pi r^2} \left[\frac{273}{16} + \frac{17}{2} \cos(kd \sin \theta) + 2 \cos(2kd \sin \theta) \right] \quad (12)$$

$$I = 0.8 \times 10^{-5} \text{Wm}^{-2} \left[\frac{273}{16} + \frac{17}{2} \cos(kd \sin \theta) + 2 \cos(2kd \sin \theta) \right]. \quad (13)$$

Vi finner dessuten

$$kd = \frac{2\pi f}{v} d = \frac{2\pi 440}{340} \times 1.0 = 8.1. \quad (14)$$

Maksima/minima opptrer når $\partial I / (\partial \theta) = 0$. Derivasjon gir et maksima for $\theta = 0$ og $\theta = \pi$ og når

$$\sin(kd \sin \theta) \left[1 + \frac{16}{17} \cos(kd \sin \theta) \right] = 0 \quad (15)$$

det vil si når

$$kd \sin \theta = n\pi, \quad (16)$$

der n er et heltall. Insetting gir når n er et like hel-tall maksimums-intensiteten

$$I = 0.8 \times 10^{-5} \text{Wm}^{-2} \left[\frac{441}{16} \right]. \quad (17)$$

Maksimums-retningene er

$$\theta_{\max} = 0 \text{ grader, } 50 \text{ grader, } 130 \text{ grader, } 180 \text{ grader, } 230 \text{ grader og } 310 \text{ grader.} \quad (18)$$

Minimums-intensiteten finnes når n er et odde tall:

$$I = 0.8 \times 10^{-5} \text{Wm}^{-2} \left[\frac{377}{16} \right]. \quad (19)$$

De lokale minimums-retningene er

$$\theta_{\min} = 23 \text{ grader, } 90 \text{ grader, } 157 \text{ grader, } 203 \text{ grader, } 270 \text{ grader og } 337 \text{ grader.} \quad (20)$$

c) Intensiteten er størst i dette punktet når alle fasene er like, $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3$.

d) Intensiteten er gitt ved

$$I = \frac{P_2}{4\pi r^2} \times \left[\frac{273}{16} + 8 \cos(\phi_3 - \phi_2 + kd \sin \theta) + \frac{1}{2} \cos(\phi_1 - \phi_2 - kd \sin \theta) + 2 \cos(\phi_3 - \phi_1 + 2kd \sin \theta) \right]. \quad (21)$$

Vi setter inn $\phi_1 = 0 = \phi_3$, $\theta = \pi/2$ og bruker $P_2/(4\pi r^2) = 3.2 \times 10^{-5} \text{ Wm}^{-2}$ får

$$\begin{aligned} I &= 3.2 \times 10^{-5} \left[\frac{305}{16} + \frac{17}{2} \cos(\omega t) \right] \\ I &= [6.1 + 2.7 \cos \omega t] \times 10^{-4} \text{ Wm}^{-2} \end{aligned} \quad (22)$$

Oppgave 2. Elektromagnetiske bølger

Maxwells' ligninger for det elektriske feltet, $\vec{E}(\vec{r}, t)$, og det magnetisk feltet, $\vec{B}(\vec{r}, t)$, i posisjonen $\vec{r}$ ved tiden t i tomt rom er

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \end{aligned}$$

der ε_0 er dielektrisitetskonstanten og μ_0 er den magnetiske permeabiliteten i vakuum.

a) Vi operer med $\vec{\nabla} \times$ på den tredje av Maxwell's ligninger:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} \times \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right).$$

Vi bruker

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{\nabla}^2 \vec{E}$$

som ved hjelp av den første av Maxwell's ligninger, $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$, blir

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\vec{\nabla}^2 \vec{E}.$$

Tilsvarende kan vi ved å bruke den fjerde Maxwell ligningen finne

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) &= -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{B} \\ &= -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Dermed finner vi

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Tilsvarende kan vi finne ved å operere med $\vec{\nabla} \times$ på den fjerde av Maxwell's ligninger:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) &= \varepsilon_0 \mu_0 \vec{\nabla} \times \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \\ \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{\nabla}^2 \vec{B} &= \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

og ved hjelp av $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ har vi

$$\vec{\nabla}^2 \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B}$$

som vi skulle vise.

Bølgehastigheten kan finnes ved å se på en planbølge som forplanter seg i en retning, f.eks. x -retningen.

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(kx - \omega t).$$

Innsatt i bølgeligningen gir dette

$$k^2 = \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2,$$

slik at bølgehastigheten er

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}.$$

b) Det elektriske feltet er

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi),$$

der $\vec{E}_0$ er amplituden, $\vec{k}$ er bølgevektoren, $\vec{r}$ er posisjonen, ω er vinkelfrekvensen, t er tiden og φ er en fasekonstant.

1. Forholdet mellom amplituden og bølgevektoren: Maxwell's første ligning ovenfor gir

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0, \\ -\vec{k} \cdot \vec{E}_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi) &= 0. \end{aligned}$$

Dette betyr at bølgevektoren og amplituden må være ortogonale. Det elektriske feltet er transversalt forplantningsretningen:

$$\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0.$$

2. Forholdet mellom bølgevektoren og vinkelfrekvensen: En lignende beregning som ovenfor gir forholdet mellom bølgevektoren og vinkelfrekvensen:

$$v = \frac{\omega}{|\vec{k}|} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}.$$

3. Polariseringen til den elektromagnetiske bølgen har: Utslaget til det elektriske feltet er alltid langs $\vec{E}_0$, slik at bølgen er lineær-polarisert.

c) Det magnetiske feltet beskrives ved

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 \cos(\vec{k}_B \cdot \vec{r} - \omega_B t + \varphi_B).$$

Maxwell's tredje ligning ovenfor gir

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ -\vec{k} \times \vec{E}_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi) &= -\omega_B \vec{B}_0 \sin(\vec{k}_B \cdot \vec{r} - \omega_B t + \varphi_B). \end{aligned}$$

Vi ser dermed at vi kan uttrykke

$$\begin{aligned} \omega_B &= \omega, \\ \varphi_B &= \varphi, \\ \vec{k}_B &= \vec{k}, \\ \vec{B}_0 &= \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}_0. \end{aligned}$$

Oppgave 3. Materialfysikk

a) Med degenerasjon menes at flere forskjellige sett med kvante-tall gir den samme energien.

Fermioner kan ikke befinne seg i samme kvante-tilstand. Egenenergien er gitt ved

$$E_{n_1, n_2, n_3} = E_0 (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2), \quad (23)$$

Energi-nivåene og degenerasjons-graden for mange-partikkel-systemet blir

Tilstand	Energi (E_0)	Degenerasjon
111	3	1
112	4	1
211	6	2
212	7	2
221	9	1
222	10	1
113	11	1

Ved null temperatur er de laveste energi-nivåene fylt. Vi ser dermed at vi fyller de fire nederste energi-nivåene med 6 partikler. Total-energien blir

$$E = E_0 (1 \times 3 + 1 \times 4 + 2 \times 6 + 2 \times 7) = 33E_0. \quad (24)$$

Bosoner kan være i samme kvantetilstand. Ved null temperatur vil da alle partiklene befinne seg i den samme laveste energi-tilstanden, $E_{1,1,1} = 3E_0$. Total-energien er da $6 \times E_{1,1,1} = 18E_0$.

b) Ett elektron er beskrevet ved den stasjonære tilstanden

$$\psi(x) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{1/4} \exp - \left(\frac{a}{2}(x-b)^2\right) \quad (25)$$

der a og b er to konstanter. Forventningsverdien til posisjonen er gitt ved

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^\dagger(x) x \psi(x).$$

Vi ser at bølgefunksjonen er sentrert rundt $x = b$ og velger derfor en ny integrasjonsvariabel $x = u + b$:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} du \psi^\dagger(u+b) (u+b) \psi(u+b).$$

Siden bølgefunksjonen er normert og sentret rundt origo i koordinatsystemet bestem av u finner vi

$$\langle x \rangle = b.$$

Tilsvarende kan vi nå finne for forventningsverdien til impulsen:

$$\begin{aligned} \langle p \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^\dagger(x) \left(\frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \right) \psi(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^\dagger(u+b) \left(\frac{\hbar}{i} \frac{d}{du} \right) \psi(u+b) \\ &= 0 \end{aligned}$$

siden $\psi(u+b)$ er symmetrisk rundt $u = 0$, slik at $d\psi(u+b)/du$ er antisymmetrisk rundt $u = 0$.

c) Frie elektroner i metaller blir beskrevet som elektroner i en tre-dimensjonal kube med lengde L og elektron-tetthet N . Hva menes med Fermi-energien til systemet? Uttrykk Fermi-energien ved elektronets masse og elektron-tettheten.

Fermi-energien er maksimal-energien til en partikkel ved det absolutte null-punkt for et mange-fermion system.

For en tre-dimensjonal partikkel i boks-system er energi-nivåene gitt ved

$$E_{n_x, n_y, n_z} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2),$$

hvor n_x , n_y og n_z er positive diskrete heltall. Det er to spinn-tilstander. Antall partikler innenfor en radius n_F med positive heltall ($1/8$ av en hel kule) er dermed

$$N = 2 \frac{1}{8} \frac{4\pi}{3} n_F^3 = \frac{\pi}{3} n_F^3$$

Fermi-energien er dermed gitt ved

$$\begin{aligned} E_F &= \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 n_F^2, \\ &= \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \left(\frac{3N}{\pi} \right). \end{aligned}$$

Vi vet også at antall partikler er $N = n_e L^3$, der n_e er elektron-tettheten. Dermed blir

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m} (3n_e \pi^2)^{2/3}. \quad (26)$$

d) Normale metaller Et normalt metall er en god leder av elektrisk strøm. I en leder ligger Fermi-energien i et område der tettheten av tilstander er stor og dermed blir ledningsevnen god fordi det er mange elektroner som kan forflytte seg.

Halvleder En halvleder er en mellomting mellom en leder og en isolator der Fermi-energien ligger i et gap mellom et fylt og et ikke fylt energi-bånd, men gapet er ikke like stort som for en isolator og halvlederen kan lede strøm ved høyere temperaturer eller hvis halvlederen dopes med urenheter.

Ferromagnet En ferromagnet er et ledende metall som har et makroskopisk magnetisk moment. Det makroskopiske magnetiske moment skyldes at flere tilstander med spinn i en bestemt retning er okkupert enn tilstander med spinn i den motsatte retningen.

Superleder En superleder har null motstand ved lave temperaturer og den har en Meissner effekt som betyr at et eksternt magnetfelt ikke kan trenge inn i superlederen.