



Løsningsforslag til eksamen i
TFY4170 Fysikk 2 Fysikk 2
Lørdag 8. august 2005

Merk: Hver del-oppgave teller like mye.

Dette løsningsforslaget er på 5 sider.

Oppgave 1.

- a) Amplituden i avstand r fra en kule-bølge er

$$y(r, t) = \frac{A}{r} \exp i(kr - \omega t + \phi). \quad (1)$$

Den totale effekten som brer seg gjennom et kule-skall er bevart. Arealet av et kule-skall er $4\pi r^2$. Intensiteten i avstand r fra høytaler nummer 2 er derfor

$$I_2(r) = \frac{P_2}{4\pi r^2} = |y_2(r, t)|^2. \quad (2)$$

Vi velger dermed $A_2 = \sqrt{P_2/(4\pi)}$. Vi setter inn $P_2 = 1\text{W}$ og $r = 100\text{m}$ og får

$$I(r) = \frac{P_2}{4\pi r^2} = 0.8 \times 10^{-5} \text{Wm}^{-2}. \quad (3)$$

Nedre hørselsgrense er $I_0 = 10^{-12} \text{Wm}^{-2}$. Lydstyrken i desibel er dermed

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0} = 10 \log \frac{0.8 \times 10^{-5}}{10^{-12}} = 69\text{dB}. \quad (4)$$

- b) Her er avstanden d mellom høytalerne mye mindre enn avstanden r . Avstands-forskjellen mellom høytaler 1 og høytaler 2 og mellom høytaler 2 og høytaler 3 er

$$\Delta r = d \sin \theta. \quad (5)$$

Det resulterer i en relative fase-forskjell p.g.a. gang-avstanden som er

$$\alpha = k \Delta r. \quad (6)$$

Den resulterende amplituden fra de tre høyttalerne blir dermed

$$y(r, t) = y_1(r, t) + y_2(r, t) + y_3(r, t) \quad (7)$$

$$= y_2(r, t) \left[1 + \sqrt{\frac{P_3}{P_2}} \exp i(\phi_3 - \phi_2 + \alpha) + \sqrt{\frac{P_1}{P_2}} \exp i(\phi_1 - \phi_2 - \alpha) \right] \quad (8)$$

$$= \sqrt{\frac{P_2}{4\pi r}} \left[1 + 4 \exp i(\phi_3 - \phi_2 + kd \sin \theta) + \frac{1}{4} \exp i(\phi_1 - \phi_2 - kd \sin \theta) \right] \quad (9)$$

Intensiteten er dermed gitt ved

$$I = \frac{P_2}{4\pi r^2} \left| 1 + 4 \exp i(\phi_3 - \phi_2 + kd \sin \theta) + \frac{1}{4} \exp i(\phi_1 - \phi_2 - kd \sin \theta) \right|^2 \quad (10)$$

$$I = \frac{P_2}{4\pi r^2} \times \left[\frac{273}{16} + 8 \cos(\phi_3 - \phi_2 + kd \sin \theta) + \frac{1}{2} \cos(\phi_1 - \phi_2 - kd \sin \theta) + 2 \cos(\phi_3 - \phi_1 + 2kd \sin \theta) \right] \quad (11)$$

Vi setter nå fasene like hverandre. Intensiteten forenkles dermed til

$$I = \frac{P_2}{4\pi r^2} \left[\frac{273}{16} + \frac{17}{2} \cos(kd \sin \theta) + 2 \cos(2kd \sin \theta) \right] \quad (12)$$

$$I = 0.8 \times 10^{-5} \text{Wm}^{-2} \left[\frac{273}{16} + \frac{17}{2} \cos(kd \sin \theta) + 2 \cos(2kd \sin \theta) \right] \quad (13)$$

Vi finner dessuten

$$kd = \frac{2\pi f}{v} d = \frac{2\pi 440}{340} \times 1.0 = 8.1 \quad (14)$$

Maksima/minima opptrer når $\partial I / (\partial \theta) = 0$. Derivasjon gir et maksima for $\theta = 0$ og $\theta = \pi$ og når

$$\sin(kd \sin \theta) \left[1 + \frac{16}{17} \cos(kd \sin \theta) \right] = 0 \quad (15)$$

det vil si når

$$kd \sin \theta = n\pi, \quad (16)$$

der n er et heltall. Insetting gir når n er et like hel-tall maksimums-intensiteten

$$I = 0.8 \times 10^{-5} \text{Wm}^{-2} \left[\frac{441}{16} \right] \quad (17)$$

Maksimums-retningene er

$$\theta_{\max} = 0 \text{ grader, } 50 \text{ grader, } 130 \text{ grader, } 180 \text{ grader, } 230 \text{ grader og } 310 \text{ grader.} \quad (18)$$

Minimums-intensiteten finnes når n er et odde tall:

$$I = 0.8 \times 10^{-5} \text{Wm}^{-2} \left[\frac{377}{16} \right] \quad (19)$$

De lokale minimums-retningene er

$$\theta_{\min} = 23 \text{ grader, } 90 \text{ grader, } 157 \text{ grader, } 203 \text{ grader, } 270 \text{ grader og } 337 \text{ grader.} \quad (20)$$

c) Intensiteten er størst i dette punktet når alle fasene er like, $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3$.

Oppgave 2.

a) Schrödinger-ligningen er gitt ved

$$H(p_{\text{op}}, x)\psi(x, t) = E_{\text{op}} = \psi(x, t). \quad (21)$$

Impuls-operatoren er

$$p_{\text{op}} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}. \quad (22)$$

og energi-operatoren er

$$E_{\text{op}} = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t}, \quad (23)$$

og innsatt gir dette Schrödinger-ligningen vi skulle vise.

b) Separasjon av variable

$$\psi(x, t) = \Psi \exp(-if(t)) \quad (24)$$

gir den tidsuavhengige Schrödinger-ligningen

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} kx^2 \right] \Psi(x) = E \Psi(x). \quad (25)$$

og ligningen for den tidsavhengige funksjonen $f(t)$:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \exp(-if(t)) = E \exp(-if(t)). \quad (26)$$

Løsningen er dermed

$$f(t) = \frac{E}{\hbar} t. \quad (27)$$

Vi bestemmer så egen-energien E fra den tidsuavhengige Schrödinger-ligningen. Den første deriverte av bølgefunksjonen er

$$\frac{d}{dx} \Psi(x) = -\frac{1}{\hbar} \sqrt{mk} x \Psi(x). \quad (28)$$

Den andre-deriverte av bølgefunksjonen er

$$\frac{d^2}{dx^2} \Psi(x) = \left[-\frac{1}{\hbar} \sqrt{mk} + \frac{1}{\hbar^2} m k x^2 \right] \Psi(x). \quad (29)$$

Den tidsuavhengige Schrödinger-ligningen gir dermed

$$\begin{aligned} H(p_{\text{op}}, x) \Psi(x) &= \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(-\frac{1}{\hbar} \sqrt{mk} + \frac{1}{\hbar^2} m k x^2 \right) + \frac{1}{2} k x^2 \right] \Psi(x) \\ &= \frac{1}{2} \hbar \sqrt{k/m} \Psi(x) \end{aligned} \quad (30)$$

$$= E \Psi(x) \quad (31)$$

Vi identifiserer $\omega = k/m$ og har dermed funnet at egen-energien er $E = \hbar\omega/2$.

c) Impuls-operatoren er $p_{\text{op}} = (\hbar/i)\partial/\partial x$. Vi finner først

$$p_{\text{op}}\Psi = i\sqrt{mk}x\Psi. \quad (32)$$

Forventningsverdien til impulsen kan dermed relateres til forventningsverdien til posisjonen som er gitt ved følgende uttrykk:

Forventnings-verdien til posisjonen er

$$\langle x(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x, t)x\psi(x, t)dx \quad (33)$$

$$\langle x(t) \rangle = \left(\frac{mk}{\pi^2\hbar^2}\right)^{1/4} \int_{-\infty}^{\infty} x \exp\left(-\frac{1}{\hbar}\sqrt{mk}x^2\right)dx \quad (34)$$

$$(35)$$

Vi ser da at $\langle x(t) \rangle = 0$ ved symmetri. Fluktuasjonene i posisjonen er gitt ved

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x, t)x^2\psi(x, t)dx \quad (36)$$

$$\langle x^2 \rangle = \left(\frac{mk}{\pi^2\hbar^2}\right)^{1/4} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp\left(-\frac{1}{\hbar}\sqrt{mk}x^2\right)dx \quad (37)$$

$$(38)$$

Vi substituerer $u = (mk)^{1/4}/\hbar^{1/2}$ og får

$$\langle x^2 \rangle = \left(\frac{mk}{\pi^2\hbar^2}\right)^{1/4} \left(\frac{\sqrt{mk}}{\hbar}\right)^{-3/2} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 \exp(-u^2)du \quad (39)$$

$$\langle x^2 \rangle = \left(\frac{mk}{\pi^2\hbar^2}\right)^{1/4} \left(\frac{\sqrt{mk}}{\hbar}\right)^{-3/2} \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \quad (40)$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{2}\hbar\frac{1}{\sqrt{mk}}. \quad (41)$$

Dette gir

$$\Delta x = \left(\frac{1}{2}\hbar\frac{1}{\sqrt{mk}}\right)^{1/2}. \quad (42)$$

Ved symmetry ser vi da at for forventningsverdien til impulsen

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x, t)p_{\text{op}}\psi(x, t) = 0. \quad (43)$$

Ved delvis integrasjon finner vi

$$\langle p^2 \rangle = -\hbar^2 \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x) \frac{d^2}{dx^2} \Psi(x) \quad (44)$$

$$\langle p^2 \rangle = \hbar^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d}{dx} \Psi(x)\right)^2 \quad (45)$$

$$\langle p^2 \rangle = mk\langle x^2 \rangle \quad (46)$$

$$\langle p^2 \rangle = \frac{1}{2}\hbar\sqrt{mk} \quad (47)$$

Dette gir

$$\Delta p = \left(\frac{1}{2} \hbar \sqrt{mk} \right)^{1/2}. \quad (48)$$

Produkter av uskarphetene blir dermed

$$(\Delta x)(\Delta p) = \frac{1}{2} \hbar. \quad (49)$$

Heisenbergs usikkerhetsrelasjon er

$$(\Delta x)(\Delta p) \geq \frac{1}{2} \hbar. \quad (50)$$

Denne tilstanden gir dermed den nedre grensen for denne uskarpheten.