



Faglig kontakt under eksamen:  
Professor Arne Brataas  
Telefon: 73593647

**Eksamen i TFY4170 Fysikk 2**  
Mandag 12. desember 2005  
15:00–18:00

Tillatte hjelpemidler: Alternativ C

Godkjent lommekalkulator.

K. Rottman: *Matematisk formelsamling*

Barnett and Cronin: *Mathematical formulae*

Sist i dette oppgavesettet er det gitt noen relasjoner som muligens kan være til nytte under eksamen. Kandidaten må selv tolke disse.

**Merk:** Hver del-oppgave teller like mye.

Dette oppgavesettet er på 5 sider.

**Oppgave 1. Kvantemekanikk**

Vi ser i denne oppgaven på en partikkel som beveger seg i én retning i en stasjonær tilstand. Bølgefunksjonen kan da skrives som  $\Psi(x, t) = \psi(x) \exp(-iEt/\hbar)$ , der  $E$  er energien til partikkelen,  $x$  er posisjonen,  $t$  er tiden,  $\hbar = h/(2\pi)$  og  $h$  er Plancks konstant.  $\psi(x)$  er den romlige delen av bølgefunksjonen.

- a) Hva er den romlige delen av bølgefunksjonen  $\psi_{\text{fri}}(x)$  og energien  $E_{\text{fri}}$  til en fri partikkel?

**SVAR**

En fri partikkel har en bestemt impuls og ubestemt posisjon. Den romlige delen av bølgefunksjonen er

$$\psi_{\text{fri}}(x) = A \exp(ipx/\hbar), \quad (1)$$

der  $p$  er impulsen,  $x$  er posisjonen og  $A$  er en normaliseringskonstant. Energien er

$$E_{\text{fri}} = \frac{p^2}{2m}. \quad (2)$$

- b) En partikkel befinner seg i en én-dimensjonal boks der potensialet er null innenfor boksen ( $0 < x < a$ ) og potensialet er uendelig stort utenfor boksen ( $x < 0$  og  $x > a$ ). Bølgefunksjonen til partikkelen  $\psi(x)$  er en løsning av den stasjonære Schrödinger-ligningen innenfor boksen med tilhørende grensebetingelser på randen av boksen ( $x = 0$  og  $x = a$ ). Schrödinger-ligningen som beskrives bølgefunksjonen innenfor boksen ( $0 < x < a$ ) er

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = E\psi(x). \quad (3)$$

Det kan vises at bølgefunksjonen til grunntilstanden er gitt ved

$$\psi_g(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi x}{a}. \quad (4)$$

Finn et uttrykk for alle energinivåene og de tilhørende bølgefunksjonene for partikkelen.

**SVAR**

En generell løsning av Schrödinger-ligningen er

$$\psi(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx), \quad (5)$$

der energien er

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (6)$$

og  $A$  og  $B$  er konstanter som skal bestemmes fra grensebetingelsene. Grensebetingelsene for et uendelig potensial utenfor boksen er at

$$\psi(x=0) = 0 \quad (7)$$

og

$$\psi(x=a) = 0. \quad (8)$$

Dette gir ligningene

$$0 = B \quad (9)$$

$$0 = A \sin(ka). \quad (10)$$

Den siste ligningen er bare oppfylt dersom

$$ka = n\pi, \quad (11)$$

der  $n$  er et heltall større enn null,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Bølgefunksjonen blir dermed

$$\psi_n(x) = A \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right). \quad (12)$$

Konstanten  $A$  bestemmes ved normalisering:

$$\int_0^a dx |\psi(x)|^2 = 1, \quad (13)$$

$$\int_0^a dx |A|^2 \sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = 1, \quad (14)$$

$$|A|^2 \frac{a}{n\pi} \int_0^{n\pi} du \sin^2 u = 1, \quad (15)$$

$$a|A|^2 \frac{1}{2} = 1, \quad (16)$$

$$|A| = \sqrt{\frac{2}{a}}. \quad (17)$$

Vi kan velge en vilkårlig fase på konstanten  $A$  og setter  $A = \sqrt{\frac{2}{a}}$ . Dermed kan vi skrive bølgefunksjonen som

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a} \quad (18)$$

og egen-energien er

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2. \quad (19)$$

- c) Hva er forventningsverdien til posisjonen og impulsen i grunntilstanden ( $\psi_g(x)$ ) til en partikkel i en boks som beskrevet ovenfor?

### SVAR

Dette er et symmetrisk boks-potensial. Det er derfor sannsynlig at forventningsverdien til posisjonen for grunntilstanden er lik snitt-verdien til posisjonen av partikkelen i boksen, dvs.  $a/2$ . Grunntilstanden er den laveste egen-energi-tilstanden, dvs.  $n = 1$ ,  $\psi_g(x) = \psi_{n=1}(x)$ . Vi finner ved direkte utregning:

$$\langle x \rangle = \int_0^a dx x |\psi_1(x)|^2, \quad (20)$$

$$\langle x \rangle = \int_0^a dx x \frac{2}{a} \sin^2 \frac{\pi x}{a}, \quad (21)$$

$$\langle x \rangle = \frac{2}{a} \left( \frac{a}{\pi} \right)^2 \int_0^\pi du u \sin^2 u, \quad (22)$$

$$\langle x \rangle = \frac{2}{a} \left( \frac{a}{\pi} \right)^2 \frac{\pi^2}{4} \quad (23)$$

$$\langle x \rangle = \frac{a}{2}. \quad (24)$$

På samme måte kan vi finne forventningsverdien til impulsen:

$$\langle p \rangle = \int_0^a dx \psi_1(x)^* \left( \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \right) \psi_1(x), \quad (25)$$

$$\langle p \rangle = 0. \quad (26)$$

## Oppgave 2. Bølgefysikk

- a) Hva menes med Huygens prinsipp?

### SVAR

Huygens prinsipp: Hvert punkt i en bølge-front er en punkt-kilde som skaper den senere utviklingen av bølgen.

Huygens prinsipp brukes til å f.eks. beregne diffraksjons-spekteret langt fra en spalte-åpning til en bølge som går gjennom spalteåpningen. Ved hjelp av Huygens prinsipp kan alle punktene i spalteåpningene betraktes som en punkt-kilde og summen av disse skaper diffraksjons-mønstre.

- b) Hva er bånd-breddeteoremet og dens analogi innen kvantemekanikken.

**SVAR**

En enkelt harmonisk bølge er overhodet ikke lokalisert, men består bare av en Fourier-komponent (bølgetall), dvs. når  $\Delta x \rightarrow \infty$  vil  $\Delta k \rightarrow 0$ .

På den annen side er det også slik at lokalisering av en bølge i posisjonsrommet krever delokalisering i det Fourier-transformerte rommet, dvs. når  $\Delta x \rightarrow 0$  vil  $\Delta k \rightarrow \infty$ .

$\Delta x$  og  $\Delta k$  kan altså ikke velges uavhengige av hverandre. Denne sammenhengen er uttrykt ved båndbredde-teoremet:

$$\Delta x \Delta k \geq \frac{1}{2}. \quad (27)$$

Analogien i kvantemekanikken er Heisenbergs usikkerhetsrelasjon. Posisjonen og impulsen til en partikkel kan ikke bestemmes nøyaktig samtidig:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (28)$$

der  $\hbar = h/(2\pi)$  og  $h$  er Plancks konstant. Impulsen kan uttrykkes ved bølgetallet ved  $p = \hbar k$  og Heisenbergs usikkerhetsrelasjon er dermed det samme som båndbredde-teoremet for klassiske bølger.

**Oppgave 3. Materialfysikk**

- a) Hva er Pauli-prinsippet?

**SVAR**

Pauliprinsippet er at to partikler med halvtallig spinn ikke kan være i samme kvantetilstand.

- b) Hva er Fermi-energien til elektronene i et metall?

**SVAR**

I et metall er alle tilstander besatt opp til Fermi-energien og ingen tilstander med energier høyere enn Fermi energien er besatt ved null temperatur. Fermi-energien er den høyeste energien til en tilstand som er okkupert ved det absolutte null-punkt.

**Oppgitt:****Noen integraler som kan være nyttige:**

$$\int_0^{n\pi} du \sin^2 u = \frac{n\pi}{2}, \text{ når } n \text{ er et positivt heltall} \quad (29)$$

$$\int_0^{n\pi} duu \sin^2 u = \frac{n^2\pi^2}{4}, \text{ når } n \text{ er et positivt heltall} \quad (30)$$