

Løsningsforslag til eksamen i
TFY4170 Fysikk 2
 Onsdag 05. desember 2007

Dette løsningsforslaget er på 3 sider.

Oppgave 1. Laserlys

- a) Minimum i intensitetsmønsteret er gitt ved $\alpha = n\pi$, der n er et heltall. Innsatt for α gir dette betingelsen

$$\sin \theta = \frac{n\lambda}{a} \quad (1)$$

Ifølge oppgaven observeres første minimum for vinkelen

$$\tan \theta = \frac{0.00552}{1} \approx \sin \theta \quad (2)$$

Kombinerer vi disse to ligningene får vi

$$\sin \theta = \frac{\lambda}{a} = 0.00552 \quad (3)$$

$$\lambda = 0.00552 \cdot 0.115\text{m} \approx 635\text{nm} \quad (4)$$

- b) For en vinkel θ må lyset gjennom sidespaltene gå en lengde $d \sin \theta$ lenger/kortere enn lyset gjennom midt-spalten for å nå fram til skjermen. Det totale bølgeutslaget langt bak spaltene er derfor

$$y = y_1 + y_2 + y_3 \quad (5)$$

$$= y_2 \left[e^{ikd \sin \theta} + 1 + e^{-ikd \sin \theta} \right] \quad (6)$$

$$= y_2 [1 + 2 \cos(kd \sin \theta)] \quad (7)$$

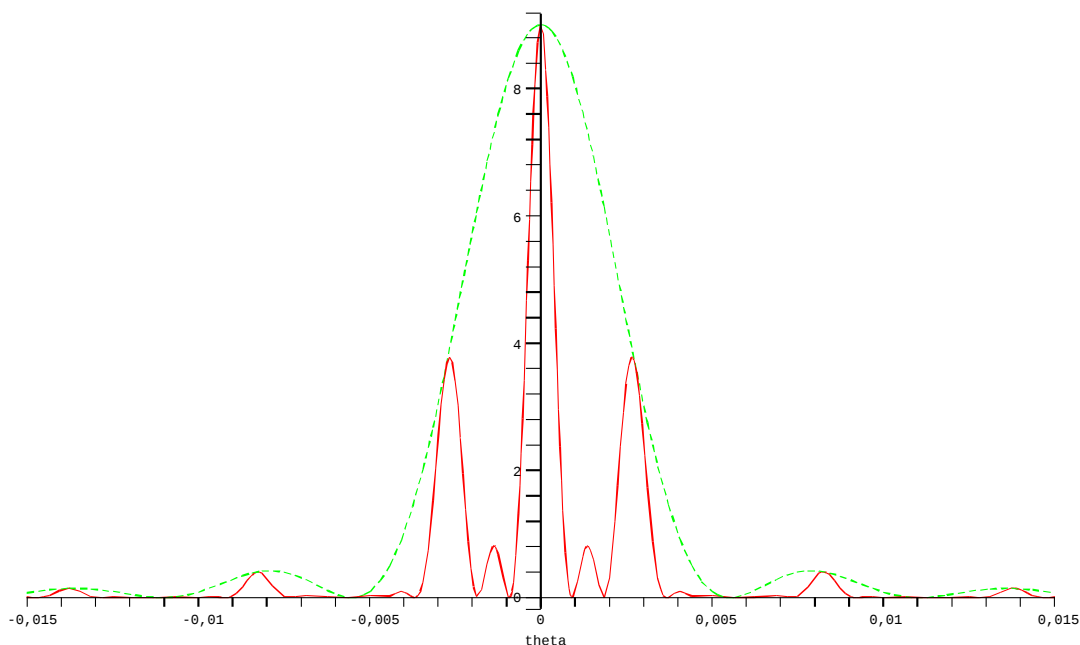
der y_i er bølgen fra spalt i og $k = 2\pi/\lambda$ er bølgetallet. Amplituden til totalbølgen er med andre ord $A = A_1[1 + 2 \cos(kd \sin \theta)]$, der A_1 er amplituden til bølgen fra en enkelt spalt. Intensiteten er proporsjonal med kvadratet av amplituden, slik at

$$\frac{I}{I_1} = \frac{A^2}{A_1^2} = [1 + 2 \cos(kd \sin \theta)]^2 \quad (8)$$

der I_1 er intensiteten for en enkelt spalt som gitt i ligning (1) i oppgaven. Dermed har vi

$$I = I_1 \left[1 + 2 \cos \left(\frac{2\pi d}{\lambda} \sin \theta \right) \right]^2 \quad (9)$$

- c) $I(\theta)$ er tegnet nedenfor (rød linje) for et lite område rundt $\theta = 0$. Den grønne stiplede hjelpelinja er diffraksjonsfaktoren gitt i ligning (1) i oppgaven (ganget med en faktor 9 for syns skyld), som modulerer tre-bølge-interferensen. Legg merke til at siden $d = 2a$, slukker diffraksjonsfaktoren ut interferenstopp nr. 2,4,6,... osv på begge sider av $\theta = 0$. Man kan også legge merke til at det i mellom hver interferenstopp er en mye mindre, sekundær interferenstopp. Interferensmønsteret er her plottet for verdiene gitt i oppgave a), $a = 0.115$ mm og $\lambda = 635$ nm.



Oppgave 2. Hydrogen og kalium

- a) Ved å bruke uttrykket for nabla-operatoren i kulekoordinater, sette inn $\psi = R\Theta\Phi$, og gange ligningen med $2mr^2 \sin^2 \theta / \hbar^2 R\Theta\Phi$ får vi

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -\frac{2mr^2 \sin^2 \theta}{\hbar^2} \left(E + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) - \frac{\sin^2 \theta}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{\sin \theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) \quad (10)$$

Venstre side avhenger nå bare av ϕ , mens høyre side bare avhenger av r og θ . Det betyr at begge sider må være lik den samme konstanten, som vi skriver $-m_l^2$ (m_l kan i utgangspunktet være kompleks, og både positiv og negativ). Dermed har vi

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -m_l^2 \Phi, \quad (11)$$

$$\Phi = e^{im_l \phi}. \quad (12)$$

R og Θ er tilsvarende gitt ved høyre side av ligningen over, som ikke trengs løses her. Dette betyr at

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)e^{im_l \phi} \quad (13)$$

b) Forventningsverdien er

$$\langle r \rangle = \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \psi_g^* r \psi_g r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad (14)$$

$$= 4\pi \int_0^\infty r^3 |\psi_g|^2 dr \quad (15)$$

$$= \frac{4}{a_0^3} \int_0^\infty r^3 e^{-2r/a_0} dr \quad (16)$$

$$= \frac{a_0}{4} \int_0^\infty u^3 e^{-u} du \quad (17)$$

$$= \frac{a_0}{4} 3! \quad (18)$$

$$= \frac{3a_0}{2} \quad (19)$$

c) Elektronkonfigurasjonen til K, $Z=19$, er $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s$. Det ytterste elektronet befinner seg utenfor helt fylte skall. Fylte skall har en kulesymmetrisk ladningsfordeling. Når en kulesymmetrisk ladningsfordeling betraktes utenfra ser den ut som om all ladningen var samlet i sentrum av kula. Det ytterste elektronet i K ser derfor en netto ladning $+Z - (Z - 1)e = +e$ lokalisert i atomkjernen, slik som elektronet i hydrogen gjør.

Oppgave 3. Kvantemekanisk fri-elektron modell

Vi ser på det to-dimensjonale tilstandsrommet med akser n_1 og n_2 . Energien kan skrives $E = E_0 n^2$, der $n = \sqrt{n_1^2 + n_2^2}$ er avstanden fra origo. Siden det er én tilstand per areal, er antall tilstander i en kvart (n_1 og n_2 kan bare være positive) ring med radius n og tykkelse dn gitt ved $\frac{1}{4} 2\pi n dn \cdot 2$, der vi har ganget med en faktor 2 for spinn. Ved 0K er alle tilstander opp til $E_F = E_0 n_F^2$ okkupert. Totalenergien er derfor

$$E_{tot} = \int_0^{n_F} E_0 n^2 \cdot \pi n dn \quad (20)$$

$$= \frac{\pi E_0}{4} n_F^4 \quad (21)$$

$$= \frac{\pi E_F^2}{4 E_0} \quad (22)$$