

Løsningsforslag til eksamen i
TFY4170 Fysikk 2
 9. desember 2008

Dette løsningsforslaget er på 6 sider.

Oppgave 1. Kvantemekanikk

Vi ser på en partikkel som kan bevege seg langs én dimensjon, x -aksen. Den tidsavhengige Schrödinger ligningen er

$$\left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x, t) \right] \psi(x, t) = \hat{E} \psi(x, t), \quad (1)$$

der $\psi(x, t)$ er den tidsavhengige bølgefunksjonen, $V(x, t)$ er potensialet,

$$\hat{p} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \quad (2)$$

er impuls-operatoren,

$$\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad (3)$$

er energi-operatoren, $\hbar = h/(2\pi)$ og h er Plancks konstant. Vi antar i resten av oppgaven at potensialet er stasjonært $V(x, t) = V(x)$.

a) Bølgefunksjonen kan skrives som

$$\psi(x, t) = \Psi(x) \exp(-iEt/\hbar). \quad (4)$$

Vis at den tidsuavhengige bølgefunksjonen $\Psi(x)$ er løsning av den tids-uavhengige Schrödinger ligningen

$$\left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x) \right] \Psi(x) = E\Psi(x). \quad (5)$$

LØSNING

Potensialet er stasjonært $V(x, t) = V(x)$. Vi setter inn ansatzen $\psi(x, t) = \Psi(x) \exp(-iEt/\hbar)$ i den tidsavhengige Schrödinger ligningen (1) og ser at impulsoperatoren $\hat{p}$ bare virker på den romlige delen av bølgefunksjonen $\Psi(x)$ og energi-operatoren $\hat{E}$ virker bare inn på den tidsavhengige delen av bølgefunksjonen $\exp(-iEt/\hbar)$. Venstre side av den tidsavhengige Schrödinger ligningen (1) kan dermed skrives som

$$\left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x) \right] \psi(x, t) = \exp(-iEt/\hbar) \left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x) \right] \Psi(x). \quad (6)$$

Tilsvarende kan den høyre siden av den tidsavhengige Schrödinger ligningen (1) skrives som

$$\hat{E}\psi(x, t) = \Psi(x)E \exp(-iEt/\hbar). \quad (7)$$

Venstre og høyre side av (1) skal være like og ved å dele både (6) og (7) på den tidsavhengige delen av bølgefunksjonen $\exp(-iEt/\hbar)$ får vi den tidsuavhengige Schrödinger ligningen (5) som vi skulle vise.

- b) Vi ser først på partikkelen i et område $|x| < a/2$, der det stasjonære potensialet $V(x) = 0$. Det er to mulige uavhengige løsninger av den tidsuavhengige Schrödinger ligningen (5). Vis at disse to mulige uavhengige løsningene kan skrives som

$$\Psi(x) = A \exp(ikx) + B \exp(-ikx), \quad (8)$$

der A og B er normaliseringskonstanter og k er et bølgetall. Finn sammenhengen mellom bølgetallet k og energien E .

LØSNING

Vi setter bølgefunksjonen (8) inn i den tidsuavhengige Schrödinger ligningen (5).

$$\left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x) \right] \Psi(x) = E\Psi(x) \quad (9)$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \right] [A \exp(ikx) + B \exp(-ikx)] = E [A \exp(ikx) + B \exp(-ikx)] \quad (10)$$

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m} [A \exp(ikx) + B \exp(-ikx)] = E [A \exp(ikx) + B \exp(-ikx)] \quad (11)$$

Dette skal være gyldig for alle posisjoner x . Dermed må energien være gitt ved

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}. \quad (12)$$

Samtidig har vi vist at bølgefunksjonen $\Psi(x) = A \exp(ikx) + B \exp(-ikx)$ er en løsning av den tidsavhengige Schrödinger ligningen (5).

- c) Uskarpheten til en fysisk størrelse O med dens assosierte kvantemekaniske operator $\hat{O}$ er definert ved

$$\delta O = \sqrt{\langle \hat{O}^2 \rangle - (\langle \hat{O} \rangle)^2}, \quad (13)$$

der

$$\langle \hat{O}^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^*(x, t) \hat{O}^n \psi(x, t) \quad (14)$$

og n er et vilkårlig tall, f.eks. $n = 1$ eller $n = 2$. Hva er uskarpheten til energien til partikkelen, δE , når den er i en tilstand beskrevet av $\psi(x, t) = \Psi(x) \exp(-iEt/\hbar)$ som ovenfor?

Løsning

Vi beregner først forventningsverdien av de forskjellige momentene til energi-operatoren:

$$\langle \hat{E}^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^*(x, t) \hat{E}^n \psi(x, t), \quad (15)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi^*(x) \exp(iEt/\hbar) (i\hbar \frac{\partial}{\partial t})^n \psi(t) \exp(-iEt/\hbar), \quad (16)$$

$$= \left[\exp(iEt/\hbar) (i\hbar \frac{\partial}{\partial t})^n \exp(-iEt/\hbar) \right] \int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi^*(x) \Psi(x), \quad (17)$$

$$= [\exp(iEt/\hbar) E^n \exp(-iEt/\hbar)] 1, \quad (18)$$

$$= E^n. \quad (19)$$

Vi brukte normaliserings-betingelsen $\int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi^*(x) \Psi(x) = 1$. Dermed finner vi uskarpheten til energien til partikkelen

$$\delta E = \sqrt{\langle \hat{E}^2 \rangle - (\langle \hat{E} \rangle)^2}, \quad (20)$$

$$= \sqrt{E^2 - E^2}, \quad (21)$$

$$= 0. \quad (22)$$

Det er ingen uskarphet i energien til partikkel i en stasjonær tilstand, som forventet.

- d) Vi antar fortsatt at partikkelen kan bevege seg fritt for alle $|x| < a/2$, men det møter en hard vegg i punktene $|x| = a/2$, dvs. stasjonære potensialet er

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{når } |x| < a/2 \\ \infty & \text{når } |x| \geq a/2 \end{cases}. \quad (23)$$

Bestem koeffisientene A og B og finn de kvantiserte energi-nivåene til systemet.

Løsning

Bølgefunksjonen er null i det området der potensialet er uendelig stort. Bølgefunksjonen må også være kontinuerlig gjennom punktene $x = -a/2$ og $x = a/2$. Det gir betingelsene

$$\Psi(x = -a/2) = 0 \quad (24)$$

og

$$\Psi(x = a/2) = 0. \quad (25)$$

Innsatt for bølgefunksjonen (8) gir dette følgende betingelser på koeffisientene A og B , samt bølgevektoren k og dermed energien E :

$$A \exp(-ika/2) + B \exp(ika/2) = 0, \quad (26)$$

$$A \exp(ika/2) + B \exp(-ika/2) = 0. \quad (27)$$

Dette gir

$$B = -A \exp(-ika), \quad (28)$$

$$\exp(ika) - \exp(-ika) = 0. \quad (29)$$

Den siste betingelsen gir en kvantiseringssbetingelse for bølgevektoren k og dermed energien $E = \hbar^2 k^2 / (2m)$:

$$\exp(ika) - \exp(-ika) = 0, \quad (30)$$

$$2i \sin(ka) = 0 \quad (31)$$

som gir

$$k_l = \frac{l\pi}{a}, \quad (32)$$

der l er et heltall og energien

$$E_l = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{l\pi}{a} \right)^2. \quad (33)$$

Bølgefunksjonen kan skrives som

$$\Psi(x) = A [\exp(ikx) - \exp(-ikx) \exp(-ika)], \quad (34)$$

$$= A \exp(-ika/2) [\exp(ik(x+a/2)) - \exp(-ik(x+a/2))], \quad (35)$$

$$= A \exp(-ika/2) 2i \sin(k(x+a/2)), \quad (36)$$

$$= A' \sin(x+a/2), \quad (37)$$

der vi har innført en ny konstant $A' = A \exp(-ika/2) 2i$.

Vi bestemmer konstanten A' ved normalisering:

$$1 = \int_{-a/2}^{a/2} dx \Psi^*(x) \Psi(x), \quad (38)$$

$$= |A'|^2 \int_{-a/2}^{a/2} dx \sin^2(k(x+a/2)), \quad (39)$$

$$= |A'|^2 \int_0^a dx \sin^2(kx), \quad (40)$$

$$= |A'|^2 \frac{a}{l\pi} \int_0^{l\pi} du \sin^2 u, \quad (41)$$

$$= |A'|^2 \frac{a}{l\pi} \frac{l\pi}{2}, \quad (42)$$

$$= |A'|^2 \frac{a}{2}. \quad (43)$$

Fortegnet og fasen til amplituden er ubestemt. Vi velger

$$|A'| = \sqrt{\frac{2}{a}} \quad (44)$$

slik at bølgefunksjonen kan skrives som

$$\Psi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{l\pi(x+a/2)}{a}. \quad (45)$$

Det går også an å skrive bølgefunksjonen på andre måter. Vi bruker $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ og finner

$$\Psi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{l\pi(x+a/2)}{a}, \quad (46)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{a}} \left[\sin \frac{l\pi x}{a} \cos \frac{l\pi}{2} + \cos \frac{l\pi x}{a} \sin \frac{l\pi}{2} \right], \quad (47)$$

$$= \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} (-1)^{l/2} \sin \frac{l\pi x}{a} & l \text{ er like} \\ \sqrt{\frac{2}{a}} (-1)^{l+1} \cos \frac{l\pi x}{a} & l \text{ er odde} \end{cases} \quad (48)$$

Fortegnene i bølgefunksjonene ovenfor er valgfrie.

Oppgave 2. Bølgefysikk

En bølge som brer seg langs x -aksen er beskrevet ved amplituden

$$w(x, t) = \sin(\omega(k)t - kx), \quad (49)$$

der

$$\omega(k) = ck^4 \quad (50)$$

er vinkelfrekvensen, c er en konstant, t er tiden og k er bølgetallet. Uttrykk gruppehastigheten til bølgen ved dens fasehastighet (dvs. bølgefart).

Løsning

Fasehastigheten er gitt ved

$$v = \frac{\omega(k)}{k}, \quad (51)$$

$$= ck^3. \quad (52)$$

Tilsvarende er gruppehastigheten er gitt ved

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}, \quad (53)$$

$$= c4k^3, \quad (54)$$

$$= 4v. \quad (55)$$

Gruppehastigheten er altså fire ganger større enn fasehastigheten.

Oppgave 3. Materialfysikk

Vi ser på et to-partikkel-system. Den stasjonære Schrödinger-ligningen for to-partikkel-systemet er

$$[\hat{H}_{\text{én}}(\mathbf{r}_1) + \hat{H}_{\text{én}}(\mathbf{r}_2)] \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = E\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2), \quad (56)$$

der E er total-energien og $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ er bølgefunksjonen til to-partikkel-systemet. Vi antar at vi har et system der de to laveste én-partikkel-tilstandene er henholdsvis $\psi_1(\mathbf{r})$ med egen-energi E_1 og $\psi_2(\mathbf{r})$ med egen-energi E_2 , dvs.

$$\hat{H}_{\text{én}}(\mathbf{r})\psi_1(\mathbf{r}) = E_1\psi_1(\mathbf{r}) \quad (57)$$

og

$$\hat{H}_{\text{en}}(\mathbf{r})\psi_2(\mathbf{r}) = E_2\psi_2(\mathbf{r}). \quad (58)$$

Hva er den laveste egen-energien E og den tilhørende bølgefunksjonen $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ for et to-partikkel-system med koordinater $\mathbf{r}_1$ og $\mathbf{r}_2$ dersom a) de to partiklene er bosoner og b) de to partiklene er fermioner? Vi ser bort fra partiklenes spinn.

Løsning

(a) Når partiklene er bosoner kan de befinne seg i samme kvantetilstand. Bølgefunksjonen skal være symmetrisk ved ombytte av de to partiklene. Den laveste energi-egentilstanden er dermed

$$\psi_b(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \psi_1(\mathbf{r}_1)\psi_1(\mathbf{r}_2) \quad (59)$$

med energi $E = 2E_1$.

(b) Når partiklene er fermioner kan de *ikke* befinne seg i samme kvantetilstand. Bølgefunksjonen skal være antisymmetrisk ved ombytte av de to partiklene. Den laveste energi-egentilstanden er dermed

$$\psi_f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{2} [\psi_1(\mathbf{r}_1)\psi_2(\mathbf{r}_2) - \psi_2(\mathbf{r}_1)\psi_1(\mathbf{r}_2)] . \quad (60)$$

med energi $E = E_1 + E_2$.

Vi ser at energien til to-fermion systemet er større enn energien til to-boson systemet.