

UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR FYSIKK
Gruppe for anvendt optikk

Faglig kontakt under eksamen:

Navn: Hans M. Pedersen

Tlf.: 3587

EKSAMEN I FAG 74181 OPTIKK

Onsdag 11. desember 1991

Tid: kl. 0900–1300

Tillatte hjelpemidler:

Godkjent lommekalkulator

K. Rottmann: Matematische Formelsammlung

C. Barrett, T.M. Crown: Mathematical Formulae

K.J. Knutsen: Formler og data i fysikk

(Delspørsmålene har tilnærmet samme vekt)

Oppgave 1

To tynne linser L_1 og L_2 med fokallengder f_1 og f_2 er montert etter hverandre i luft ($n = 1$) med en innbyrdes avstand d . L_1 har aperture med diameter D og L_2 har aperture med diameter $2D$.

- a) Finn elementene til systemmatrisen $S = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ (fra første til siste flate i det sammensatte systemet) uttrykt som funksjoner av f_1 , f_2 og d .
- b) Finn posisjon av de to hovedplanene (referert til første og siste flate i systemet), og avstanden mellom dem uttrykt som funksjoner av f_1 , f_2 og d .
- c) Sett inn tallverdier i formlene funnet foran og skisser systemet og merk av kardinalpunktene (hovedplanene og fokalpunktene) for $f_1 = 10$ cm, $f_2 = -5$ cm og $d = 7,5$ cm.

I resten av oppgaven antar vi at $f_1 + f_2 = d$ slik at vi har et såkalt telesentrisk system.

- d) Finn overgangsmatrisen mellom et objektplan i en avstand s foran L_1 og et billedplan i en avstand s' bak L_2 . Vis at ved avbildning reduseres denne til:

$$O_{ss'} = \begin{bmatrix} -f_2/f_1 & 0 \\ 0 & -f_1/f_2 \end{bmatrix}.$$

- e) Hva er avbildningsligningen i dette tilfellet (sammenhengen mellom s og s')? Hva er systemets forstørrelse β ? Hva er systemets fokallengde? Har vi hovedplan i det tilfellet, og hvor er de i så fall plassert?
- f) Anta at $f_1 = f_2$, og at $s = f_1$. Finn aperturblenden for avbildningen, og plassering og størrelse av utgangspupillen, for $f_1 = 15$ cm og $D = 1$ cm.
- g) Hva er blendertallet (F -tallet) for avbildningen? Anta at $\lambda = 500$ nm. Hva er minste avstand mellom to billedpunkter som akkurat kan adskilles.

Oppgave 2

Et Fabry-Perot interferometer med kontrast $F = 95$ brukes til å analysere finstrukturen i et smalt spektrum. For enkelhets skyld antar vi at spekteret er en dublett med midlere bølgelengde $\lambda = (\lambda_1 + \lambda_2)/2 = 500$ nm og $\lambda_2 - \lambda_1 = 0,5$ nm. Vi antar også loddrett innfall slik at $\theta = 0$.

- a) Hva er maksimal og minimal transmisjon gjennom interferometeret? Ved hvilke bølgelengder får vi konstruktiv interferens (maksimal transmisjon) ved en gitt separasjon d mellom speilene?
- b) Skisser opp transmisjonskurven som funksjon av bølgelengde for en gitt separasjon d mellom speilene. Indiker på figuren hva som er det fri spektrale området ("free spectral range") $(\Delta\lambda)_{sr}$, og hva som er den minste bølgelengdeforskjellen $\Delta\lambda$ som instrumentet kan oppløse.
- c) Utled en formel for det fri spektrale området som funksjon av midlere bølgelengde λ og speilavstanden d .

- d) Anta at $d = 0,5$ mm. Hva er instrumentets fri spektrale område når $\lambda = 500$ nm? Er dette et fornuftig valg av parametere dersom vi vil bruke instrumentet til å analysere de to spektrallinjene? Svaret skal begrunnes.
- e) Forklar kvalitativt hva som skjer dersom speilene har så lav refleksivitet at F blir liten (f.eks. $F \approx 1$ eller mindre). Skisser den spektrale transmisjonskurven for dette tilfellet (på samme måte som i deloppgave b)).

Oppgitt:

For en tynn linse (og mellom hovedplan i et sammensatt system) er systemmatrisen gitt som:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{bmatrix}.$$

Translasjonsmatrisen for en avstand s (i $+z$ retning) er gitt som:

$$T(s) = \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Hovedplanene H_1 og H_2 ligger, henholdsvis, en avstand h_1 foran første flate og en avstand h_2 bak siste flate i det sammensatte systemet, hvor:

$$h_1 = (1-D)/C, \quad h_2 = (1-A)/C,$$

og A, B, C, D er elementene til systemmatrisen S . Mellom hovedplanene H_1 og H_2 har vi avbildning med forstørrelse $\beta = 1$.

F -tallet (blendertallet) for en aperture som utgjør en radiell vinkel γ_m' sett fra et billedpunkt på akse er

$$F' = 1/(2\sin\gamma_m').$$

Rayleighgrensen for oppløsning er gitt av:

$$\Delta x = 1,22 \lambda F'.$$

Transmisjonen i et Fabry-Perot interferometer er gitt av

$$T = \frac{1}{1 + F \sin^2(\delta/2)},$$

hvor F er interferometerets kontrast og fasedifferansen (med luft mellom speilene slik at $n_2 = 1$) er gitt av

$$\delta = 4\pi d \cos\theta / \lambda.$$

Instrumentets finesse er gitt ved:

$$\mathcal{F} = \frac{(\Delta\lambda)_{sr}}{\Delta\lambda} = \pi \sqrt{F} / 4,$$

hvor $(\Delta\lambda)_{sr}$ er det fri spektrale området, og $\Delta\lambda$ er den minste bølglengdedifferans som instrumentet kan oppløse.

Løsningsforslag – 1991

Oppgave 1

a)

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-d/f_1 & d \\ -(1/f_1 + 1/f_2 - d/(f_1 f_2)) & 1-d/f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

b)

$$h_1 = (1-D)/C = f_1 d / (d - f_1 - f_2), \quad h_2 = (1-A)/C = f_2 d / (d - f_1 - f_2)$$

$$\text{Avstand } H_1 - H_2 = h_1 + h_2 + d = d^2 / (d - f_1 - f_2).$$

c)

$$A = 1 - d/f_1 = 0.25$$

$$B = d = 7.5 \text{ cm}$$

$$C = -(1/f_1 + 1/f_2 - d/(f_1 f_2)) = -0.05 \text{ cm}^{-1}$$

$$D = 1 - d/f_2 = 2.5$$

$$h_1 = 30 \text{ cm}, \quad h_2 = -15 \text{ cm}.$$

$$\text{Avstand } H_1 - H_2 = 22.5 \text{ cm}$$

d) $f_1 + f_2 = d \Rightarrow$

$$S = \begin{bmatrix} -f_2/f_1 & f_1+f_2 \\ 0 & -f_1/f_2 \end{bmatrix}$$

$$O_{ss'} = \begin{bmatrix} 1 & s' \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -f_2/f_1 & f_1+f_2 \\ 0 & -f_1/f_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_2/f_1 & f_1+f_2-sf_2/f_1-s'f_1/f_2 \\ 0 & -f_1/f_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix}. \text{ Ved avbildning: } B' = 0 \Rightarrow O_{ss'} = \begin{bmatrix} -f_2/f_1 & 0 \\ 0 & -f_1/f_2 \end{bmatrix} \text{ QED.}$$

e) $B' = 0 \Rightarrow s' = -(f_2/f_1)^2 s + (f_1+f_2)f_2/f_1.$

$$\beta = A' = -f_2/f_1$$

$$f = -1/C' \rightarrow \infty.$$

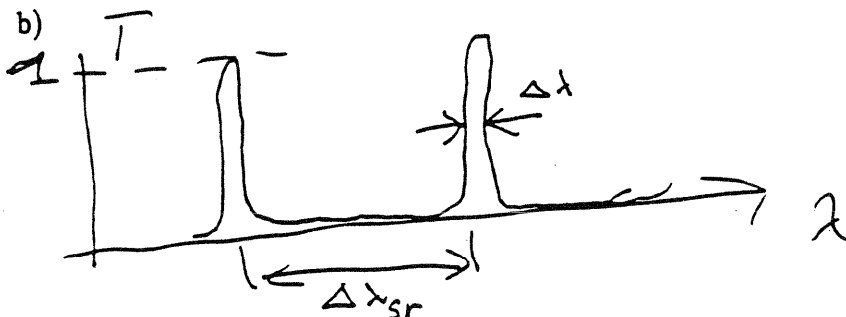
Ingen hovedplan (med $\beta=1$) siden β alltid er den samme.

f) Objektpunkt på aksen gir parallell strålegang mellom linsene (siden $s = f_1$). Da må linse L_1 være apertureblende og inngangspupille (siden den er minst). Den avbildes til utgangspupillen (2f-avbildning) av L_2 med forstørrelse 1. Utgangspupillen ligger derfor $2f_1 = 30 \text{ cm}$ bak L_2 (dvs 15 cm bak bildet) og har diameter 1 cm.

g) $F = 15 \text{ cm}/1 \text{ cm} = 15. \Delta x = 1.22 \lambda F = 1.22 \cdot 500 \text{ nm} \cdot 15 = 9.15 \mu\text{m}.$

Oppgave 2

a) $T_{\max} = 1$ for $\delta = 2\pi m$ (m heltall), $T_{\min} = 1/(1+F) = 1/96$ for $\delta = 2\pi(m+1/2).$
 $\delta = 4\pi d/\lambda = m2\pi \Rightarrow \lambda_m = 2d/m.$



c) For $m \gg 1$: $\Delta \lambda_{sr} = \lambda_m - \lambda_{m+1} = 2d(1/m - 1/(m+1)) = 2d/[m(m+1)] \approx 2d/m^2$
 $\lambda = (\lambda_m + \lambda_{m+1})/2 = d(1/m + 1/(m+1)) = 2d(m+1/2)/[m(m+1)] \approx 2d/m$

$$\Rightarrow m = (2d)/\lambda \text{ og } \Delta\lambda_{sr} = (2d)/m^2 = \lambda^2/(2d). \text{ Dvs } \Delta\lambda_{sr}/\lambda = \lambda/(2d).$$

$$d) \Delta\lambda_{sr} = \lambda^2/(2d) = (5 \cdot 10^{-7})^2 / 10^{-3} \text{ m} = 25 \cdot 10^{-11} \text{ m} = 2.5 \text{ \AA}.$$

Dette er mindre enn $\lambda_2 - \lambda_1 = 0.5 \text{ nm} = 5 \text{ \AA}$, så vi kan ikke analysere de to spektrallinjene uten å redusere d ytterligere.

3) Vi får fortsatt 100% transmisjon ved konstruktiv interferens, men minimum $1/(1+F)$ øker til mer enn 50%. Variasjonen vil være nær cosinusformet (bare første indre refleksjon bidrar vesentlig $\Rightarrow$ 2 bølgeinterferens dominerer)

