
Løsningsforslag – Eksamen 1992:

Oppgave 1

a) Matrisemultiplikasjon:
$$\begin{bmatrix} 1 & d'/n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d/n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix}$$

gir:
$$A' = A + Cd'/n, \quad B' = Ad/n + Dd'/n + B + Cdd'/n^2$$

$$C' = C \quad \text{og} \quad D' = D + Cd/n.$$

b) Ved avbildning er $B' = 0$, og da er $A' = \beta$ forstørrelsen og $D' = 1/\beta$.
Avbildningsmatrisen blir:

$$\begin{bmatrix} \beta & 0 \\ -n/f & 1/\beta \end{bmatrix}$$

c) Hovedplanene H og H' er definert ved at vi har avbildning mellom dem med forstørrelse $\beta = 1$. For $d = h$ og $d' = h'$ har vi da at $A' = D' = 1$, som gir de to oppgitte formelene.

d) Avbildningsmatrise mellom hovedplan: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -n/f & 1 \end{bmatrix}$. Når avstandene refereres til hovedplanene oppfyller s og s' linseformelen: $1/s + 1/s' = 1/f$.

e) Apertureblenden er den fysiske blenden som avgrenser strålebunten ved avbildning av et punkt på aksene. Feltblenden er den fysiske blenden som avgrenser det knippet av hovedstråler (gjennom sentrum av apertureblenden) vi kan trekke mellom objektpunkter og tilhørende billedpunkt. Inngangspupillen er apertureblenden avbildet til objektrommet. Utgangspupillen er apertureblenden avbildet til billedrommet. Inngangsvinduet er feltblenden avbildet til objektrommet. Utgangsvinduet er feltblenden avbildet til billedrommet.

Oppgave 2: For $n = 1$:

$$\begin{aligned} \text{a) } \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-t/f_1 & t \\ -[1/f_1 + 1/f_2 - t/(f_1 f_2)] & 1-t/f_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.5 & 10 \text{ cm} \\ -0.1 \text{ cm}^{-1} & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

b) $h = (1-D)/C = -10 \text{ cm}$ (H ligger 10 cm bak L_1 , dvs i L_2)
 $h' = (1-A)/C = -0.5/0.1 \text{ cm} = -5 \text{ cm}$ (H' ligger 5 cm foran L_2 , dvs. midt mellom linsene).
 $f = -1/C = 10 \text{ cm}$.
 Objektavstand $s = 90 \text{ cm} - h = 100 \text{ cm}$. $1/s + 1/s' = 1/f$ gir $s' = 11.111 \text{ cm}$.
 Dvs. bildet ligger $11.111 \text{ cm} + h' = 6.111 \text{ cm}$ etter L_2 .
 Forstørrelsen er $\beta = -s'/s = 0.11111 = -1/9$.

c) Vi avbilder alle aperturer til billedsiden: L_2 ligger i billedrommet og randstrålen til et billedpunkt på aksene har vinkel $1.5 \text{ cm}/6.1111 \text{ cm} =$ med aksene. L_1 avbildes til ∞ . Randstrålen har vinkel $1/10$ med aksene. [Kan bruke matrisemetoden her, men det er enklest å se på stråler gjennom sentrum av L_2 som kommer ut med samme retning. Siden bildet ligger i ∞ utgjør det samme vinkel sett fra billedpunktet og sentrum av L_2 .]

Det følger at innfatinngen til L_1 er apertureblende og inngangspupille, og at utgangspupille ligger i ∞ . Da er innfatningen til L_2 feltblende, og utgangsvindu. Hovedstrålene (gjennom sentrum av apertureblenden) går parallelle med aksene i billedrommet, så billedfeltets diameter er $D_2 = 3 \text{ cm}$. Den tilsvarende feltdiameter i objektplanet er da $D_2/|\beta| = 3 \text{ cm}/(1/9) = 27 \text{ cm}$.

d) Systemet har 4 brytende flater, så samlet transmisjonskoeffisient er

$\mathcal{T} = (0.99)^4 = 0.961$. Uten tap er irradiansen på akse:

$E_0 = L \Delta\Omega' = L \pi (1/10)^2 = 0.628 \text{ W/m}^2$. Med tap er den $E = E_0 \mathcal{T} = 0.604 \text{ W/m}^2$.

Over billedfeltet varierer irradiansen som $\cos^4\theta$ hvor θ er vinkelen mellom hovedstrålen og akse. Men i dette tilfellet er utgangspupillen i ∞ slik at $\theta = 0$ for alle billedpunktene, og da varierer ikke irradiansen over billedfeltet.

e) $F = 1/(2v_m') = 1/(2/10) = 5$. Oppløsningsgrensen er $\Delta y' = 1.22 \lambda F = 3.05 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 3.05 \mu\text{m}$. Antall punkter som kan oppløses: $N = \pi(D_2/2)^2 / \pi \Delta y'^2 = (D_2/(2\Delta y'))^2 = (3 \cdot 10^{-2} / 6.1 \cdot 10^{-6})^2 = 2.419 \cdot 10^7$.

Oppgave 3

a) Felt ved $z = 0$:

$$U(x, y, 0) = A(x, y) = A[1 + \cos(2\pi y/d)]/2 = A/2 + (A/4)e^{i2\pi y/d} + (A/4)e^{-i2\pi y/d} \quad (1)$$

Planbølge $e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)}$ varierer som $e^{i(k_x x + k_y y)}$ ved $z = 0$. (1) inneholder tre ledd av denne formen. Første ledd, konstanten $A/2$, svarer til at $k_x = k_y = 0$ og $k_z = k$ slik at den tilsvarende planbølgen blir en dempet versjon av belysningsbølgen: $U_1 = (A/2)e^{ikz}$.

Annet ledd i (1): $(A/4)e^{i2\pi y/d}$ svarer til $k_x = 0$, $k_y = 2\pi/d$ og $k_z = \sqrt{k^2 - (2\pi/d)^2}$, og planbølgen blir $U_2 = (A/4)e^{i(2\pi y/d + k_z z)}$.

Tredje ledd i (1): $(A/4)e^{-i2\pi y/d}$ svarer til $k_x = 0$, $k_y = -2\pi/d$ og $k_z = \sqrt{k^2 - (2\pi/d)^2}$, og planbølgen blir $U_3 = (A/4)e^{i(-2\pi y/d + k_z z)}$. Det diffrakterte feltet blir summen av disse tre planbølgene som går i ulik retning, dvs.

$$U(x, y, z) = U_1 + U_2 + U_3 \\ = (A/2)e^{ikz} + (A/4)e^{i(2\pi y/d + \sqrt{k^2 - (2\pi/d)^2} z)} + (A/4)e^{i(-2\pi y/d + \sqrt{k^2 - (2\pi/d)^2} z)}$$

b) I paraksialtilnærmelsen har vi at $\sqrt{k^2 - (2\pi/d)^2} \approx k - (2\pi/d)^2/(2k) = 2\pi/\lambda - \pi\lambda/d^2$. Innsatt i uttrykket for det diffrakterte feltet får den oppgitte formelen.

$e^{-i\pi\lambda z/d^2} = 1$ for $\pi\lambda z/d^2 = 2\pi \cdot m$ hvor m er et heltall. Da ser vi direkte at det diffrakterte feltet er $Ae^{ikz}u(x, y)$, dvs. det samme som om objektet hadde stått der og blitt belyst av bølgen Ae^{ikz} . Dette skjer for $z = z_m = 2md^2/\lambda = mz_1$ hvor m er et heltall og $z_1 = 2d^2/\lambda = 4 \text{ cm}$. For hver fjerde cm får vi altså avbildet objektet i det diffrakterte feltet.

c) Hver av de tre planbølgene fokuseres av linsen og avbildes til punkter (diffraksjonstopper) i linsens bakre fokalplan.