

Løsningsforslag TFY 4195 Optikk. Des.-17

- 1a) Det synlige spekteret går fra ca. 400 nm til 700 nm.
Dette svarer til frekvenser $\nu = \frac{c}{\lambda}$ fra hhv. $7,5 \cdot 10^{14}$ til $4,3 \cdot 10^{14}$ Hz.
- Med en energi på 8040 eV vil røntgenfotonet ha en frekvens $\nu = \frac{E}{h} = \frac{8040 \cdot 1,60 \cdot 10^{-19}}{6,62 \cdot 10^{-34}} \text{ Hz} = \underline{\underline{1,9 \cdot 10^{18} \text{ Hz}}}$
 $= 1,9 \text{ exa Hz}$
- Bevegelsesmengde $p = \frac{h}{\lambda} = \frac{E}{c} = \underline{\underline{4,3 \cdot 10^{-24} \text{ kg m/s}}}$
 - Bølglengde $\lambda = \frac{hc}{E} = \underline{\underline{1,54 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 0,154 \text{ nm}}}$

- b) Vi antar at bølgen går i $\vec{k}$ -retning. $\vec{E}$ kan da uttrykkes ved:
- $$\underline{\underline{\vec{E} = E_0 \hat{e}_1 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_1)} + E_0 \hat{e}_2 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_2)}}}$$

$$\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 = 0, \quad \vec{k} = n \frac{2\pi}{\lambda} \hat{e}_1 \times \hat{e}_2.$$

Spesialtilfelle $\vec{k} \parallel \hat{z}$:

$$\underline{\underline{\vec{E} = (E_0 \hat{x} e^{i\phi_x} + E_0 \hat{y} e^{i\phi_y}) e^{i(kz - \omega t)}}}$$

Jones-vektor beskriver kun polariseringen til $\vec{E}$ -feltet, $\begin{bmatrix} E_0 x e^{i\phi_x} \\ E_0 y e^{i\phi_y} \end{bmatrix}$, når bølgen går i z -retning.

1c) Tynn linse, $f = -0.50 \text{ m}$, $M_T = \frac{1}{3}$.

Gauss: $\frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{f}$

$$M_T = -\frac{s_i}{s_o} = \frac{1}{3} = -\frac{y_i}{y_o}$$

Løser for s_o :

$$\frac{1}{s_o} - \frac{3}{s_o} = \frac{1}{f}$$

$$-\frac{2}{s_o} = \frac{1}{f}$$

$$s_o = -2f = \underline{\underline{1.0 \text{ m}}}$$

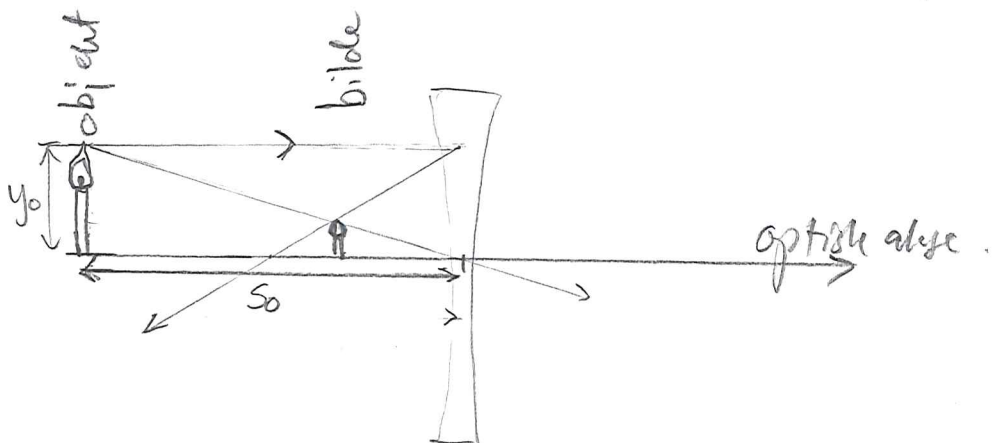
(foran linse)

Løser for s_i :

$$\frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{f}$$

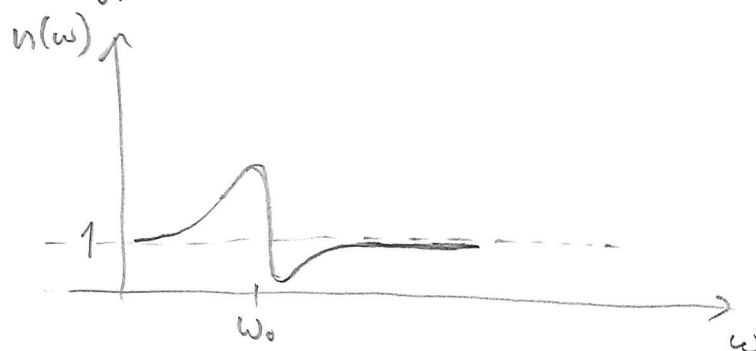
$$s_i = \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{s_o} \right)^{-1} = \frac{s_o f}{s_o - f} = -\frac{1}{3} \text{ m}$$
$$\underline{\underline{= -0.33 \text{ m}}}$$

(foran linse)



1d) Prisme. Snells lov $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$

Dispersion, typisk

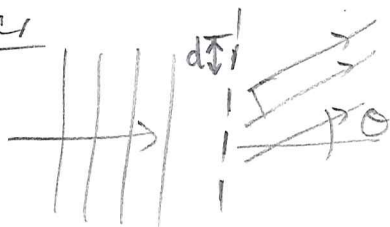


Normal dispersion $\frac{dn}{d\omega} > 0$,

unntatt nær resonansfrekvenser ω_0
(hvor det er absorpsjon og $\frac{dn}{d\omega} < 0$).

2: Det "vanlige" er altså at dispersjonen
øker med økende frekvens.

Gitter



$$n\lambda = d \sin \theta$$



$$\frac{nc}{v} = d \sin \theta$$

2: Økende frekvens v gir mindre
spredningsvinkel θ .

Dispersjonen $\frac{d\theta}{dv}$ avtar med
økende frekvens.

Oppg. 2 a) Vi har $M = M_5 M_4 M_3 M_2 M_1$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s_1 & 1 \end{bmatrix} \quad M_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1/f_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ L & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_4 = \begin{bmatrix} 1 & -1/f_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s_2 & 1 \end{bmatrix}$$

Med verdiene $f_1 = -10,0$ $L = 14,0$
 $f_2 = 15,0$ $s_2 = 50,0$

(alle med enhet cm)

fås

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{15} - \frac{3s_1}{50} & -\frac{3}{50} \\ \frac{52}{3} - \frac{3s_1}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

For en stråle som har $\alpha_0 = 0$, $y_0 = 2$

fås $\begin{bmatrix} nx \\ y \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{6}{50} \\ -\frac{6}{5} \end{bmatrix}$

Svaret er uavhengig av s_1 , som forventet for horisontal stråle.

Vinkel i bildeplan $\alpha = -\frac{6}{50} \approx -0,12$ [rad]

Posisjon ——— $y = -\frac{6}{5} \approx -1,20$ [cm]

2b) Betragtelse for aubildning: $C=0$

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

$$C=0 \Rightarrow \begin{bmatrix} n\alpha \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n\alpha \\ y \end{bmatrix}$$

$$\text{d. } y' = Dy$$

slik at alle stråler fra y i objektplanet samles i y' i bildeplanet (uavh. av α).

$$C=0 \Rightarrow \frac{52}{3} - \frac{3s_1}{5} = 0$$

$$s_1 = \frac{5}{3} \cdot \frac{52}{3} \approx \underline{\underline{28,9 \text{ cm}}}$$

$$\underline{\underline{M_T \equiv -\frac{y'}{y} = -D = \frac{3}{5}}}$$

Bildet er forminsket og opp-rett.

2e) Det er to muligheter for hva som er apertureblende/AS:
L1 eller L2. Begge linser har diameter D.

• Hvis L1 er AS, er L1 også inngangspupille.

Da er åpningsvinkelen $\beta_1 = \arctan \frac{D/2}{s_1}$.

• Hvis L2 er AS, må vi beregne dens avbildning
gjennom L1:

$$\frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{f} \quad , \quad f = f_1 = -10 \text{ cm}$$

$$s_o = L = 14 \text{ cm}$$

$$s_i = \frac{L f_1}{L - f_1} \approx -5,8 \text{ [cm]}.$$

Ettersom s_i er negativ, er bildet
på samme side av linse som objektet.

Linserne har samme diameter

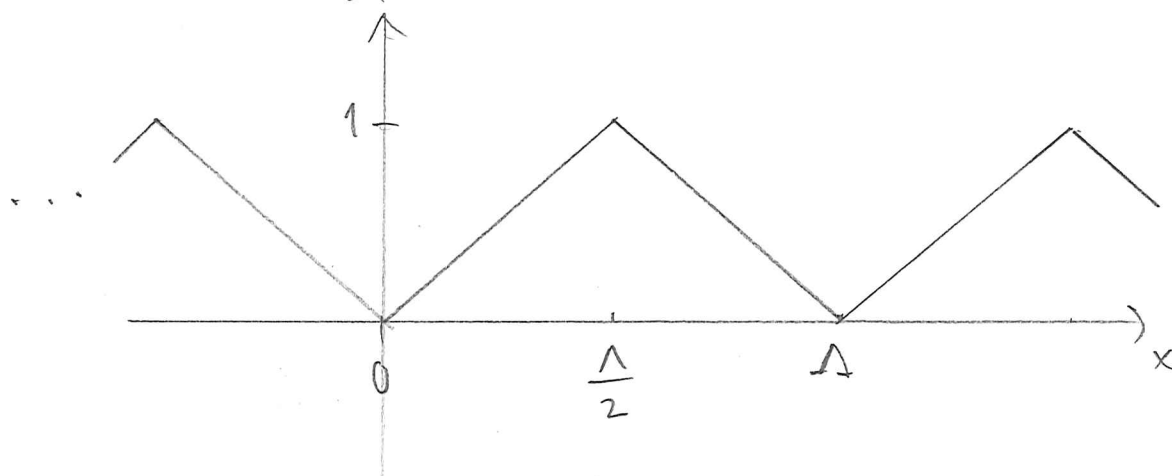
$$\Rightarrow \beta_2 < \beta_1 \quad \underline{\underline{L2 \text{ er AS}}}$$

$$\text{ettersom} \quad \beta_2 = \arctan \frac{D/2}{s_1 + s_i}$$

Svar: L2 er AS. Inngangspupillen ligger 5,8 cm
nedstrøms fra L1.

Oppgave 3.

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\Lambda}, & 0 < x < \frac{\Lambda}{2} \\ \frac{2}{\Lambda}(\Lambda - x), & \frac{\Lambda}{2} \leq x < \Lambda \end{cases}$$



(Alle sinus-ledd har oddsymmetri og er derfor fraværende i Fourier-rekken til en like-funksjon.)

(Vi ser direkte at a_0 leddet ("gjennomsnittet") er $\frac{1}{2}$.)

$$\text{Evt.: } a_0 = \frac{1}{\Lambda} \int_0^{\Lambda} f(x) dx = \dots = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}.)$$

(Vedr. diffraksjon og F.T., se svar gitt i b)).

3b) Oppgitt: $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{\Lambda}$
 forts.

Ved å benytte at $\cos u = \frac{1}{2}(e^{iu} + e^{-iu})$ fås umiddelbart

$$f(x) = a_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(e^{i \frac{n\pi x}{\Lambda}} + e^{-i \frac{n\pi x}{\Lambda}} \right)$$

Med $a_n = 0$ for oppgitte n , og $n \leq 6$, fås

$$f(x) = a_0 + \frac{1}{2} a_2 \left(e^{i \frac{2\pi x}{\Lambda}} + e^{-i \frac{2\pi x}{\Lambda}} \right) + \frac{1}{2} a_6 \left(e^{i \frac{6\pi x}{\Lambda}} + e^{-i \frac{6\pi x}{\Lambda}} \right)$$

Når man skal regne ut den Fouriertransformerte av dette, fås uttrykk på formen $\int e^{i(k_x x + \frac{n\pi x}{\Lambda})} dx$ som ved Fourier-shift-teoremet er $\delta(k_x + \frac{n\pi}{\Lambda})$

Det følger at

$$F(k_x) = a_0 \delta(k_x) + \frac{a_2}{2} \delta(k_x \pm \frac{2\pi}{\Lambda}) + \frac{a_6}{2} \delta(k_x \pm \frac{6\pi}{\Lambda})$$

Kommentar:

Når betingelsene for Fraunhoferdiffraksjon er oppfylt ("fjernfelt"), er amplituden til E-feltet i detektorplanet gitt ved Fouriertransformasjonen av transmisjonsfunksjonen til det diffrakterende objektet.

Intensiteten er gitt ved absolutt-kvadratet av amplituden,

$$I \sim |F\{t(x,y)\}|^2$$

3b) $t(x,y) = f(x) \cdot \text{rect}\left(\frac{y}{W}\right)$

$\Lambda = 2 \mu\text{m}$

3 detektorplanet måles $I(X, Y)$, som er gitt ved $|F.T.|^2$.

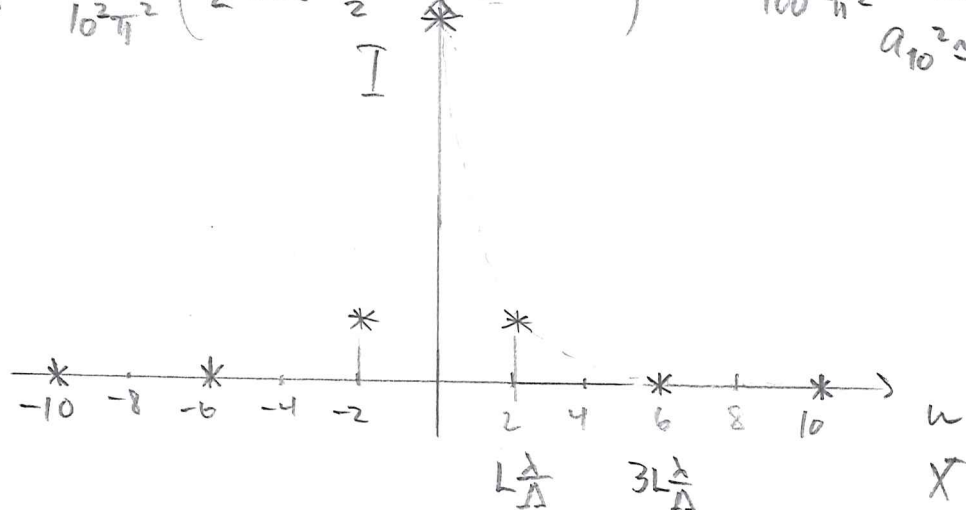
Oppgitt: $a_n \neq 0$ for $n = 0, 2, 6, 10, 14, \dots$

$a_0 = \frac{1}{2} \quad a_0^2 \approx 0.25$

$a_2 = \frac{4}{2^2 \pi^2} \left(2 \cos \frac{2\pi}{2} - \cos 2\pi - 1 \right) = \frac{-4}{\pi^2} \approx -0.405$
 $a_2^2 \approx 0.16$

$a_6 = \frac{4}{6^2 \pi^2} \left(2 \cos \frac{6\pi}{2} - \cos 6\pi - 1 \right) = -\frac{4}{9 \pi^2} \approx -0.045$
 $a_6^2 \approx 0.002$

$a_{10} = \frac{4}{10^2 \pi^2} \left(2 \cos \frac{10\pi}{2} - \cos 10\pi - 1 \right) = -\frac{16}{100 \pi^2} \approx -0.016$
 $a_{10}^2 \approx 2.6 \cdot 10^{-4}$



Gitteret gir "ingen begrensning" i y-retning ($W \gg \lambda$):

$\Rightarrow I(X, Y) \propto \delta(Y)$

Relative intensiteter:

$I_0 := 1$

$I_2/I_0 = \frac{\left(\frac{1}{2} a_2\right)^2}{a_0^2} = \frac{\left(\frac{1}{2} \frac{4}{\pi^2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \underline{\underline{0.16}}$

$I_6/I_0 = \frac{\left(\frac{4}{9} a_6\right)^2}{a_0^2} = a_6^2 = \underline{\underline{0.002}}$

3b)
for B.

$$L = 4.00 \text{ m}, \lambda = 633 \text{ nm}, \Lambda = 2.00 \text{ nm.}$$

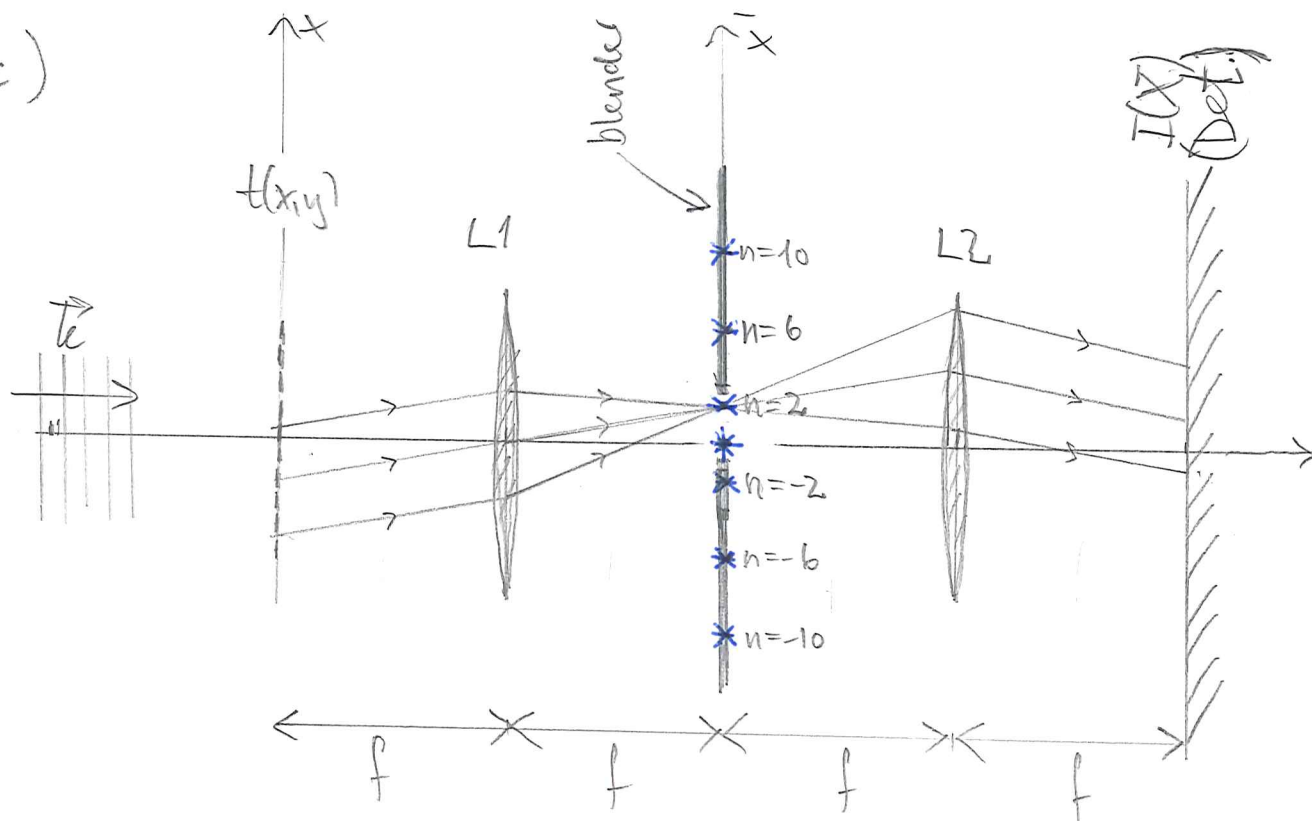
$$n=0: k_x = k \sin \theta_x = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{X}{L} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{X=0}}$$

$$n=2: k_x = k \sin \theta_x = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{X}{L} = \pm \frac{2\pi}{\Lambda} \Rightarrow X = \pm L \frac{\lambda}{\Lambda} \\ = \underline{\underline{\pm 1.27 \text{ m}}}$$

$$n=6: k_x = k \sin \theta_x = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{X}{L} = \pm \frac{6\pi}{\Lambda} \Rightarrow X = \pm 3L \frac{\lambda}{\Lambda} \\ = \underline{\underline{3.80 \text{ m}}}$$

$$\left(\text{Note: } F = \frac{a^2}{L\lambda} < 1, \text{ Fraunhofer-regime, OK.} \right).$$

3c)



Blenderen skal kun la $n = \{0, 2\}$ passere, som vist.
Den må altså plasseres usymmetrisk.

Jmf 3c) må vi ha at $x' = +f \frac{\lambda}{\Lambda}$.

Minste mulige spalteåpning er avstanden fra nullte til andre diffraksjonsorden, dvs $f \frac{\lambda}{\Lambda}$

$$f \frac{\lambda}{\Lambda} = 0,2 \text{ cm} \frac{633 \text{ nm}}{2,00 \mu\text{m}} = 63,3 \cdot 10^{-9} \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$= \underline{\underline{63,3 \text{ mm}}}$$

Største mulige spalteåpning er avstanden fra (-2) . til $(+6)$. diffraksjonsorden, dvs

$$3f \frac{\lambda}{\Lambda} - (-f \frac{\lambda}{\Lambda}) = 4f \frac{\lambda}{\Lambda} = \underline{\underline{25,3 \text{ cm}}}$$