



Faglig kontakt under eksamen:
Professor Arne Brataas
Telefon: 73593647

Eksamen i TFY4205 Kvantemekanikk

Torsdag 9. juni 2005
9:00–14:00

Tillatte hjelpemidler: Alternativ C

Godkjent lommekalkulator.

K. Rottman: *Matematisk formelsamling*

Barnett and Cronin: *Mathematical formulae*

Sensur faller før 30. juni.

Dette oppgavesettet er på 10 sider.

Oppgave 1. Grunnleggende kvantemekanikk

a) Kommutatoren mellom impuls-operatoren $\hat{p}_x$ og posisjons-operatoren $\hat{x}$ er

$$[\hat{p}_x, \hat{x}] = \frac{\hbar}{i}. \quad (1)$$

Skriv opp Heisenbergs uskarphetsrelasjon (usikkerhetsrelasjon) for impuls og posisjon i én dimensjon. Definér symbolene Δx og Δp_x som inngår, presist. Forklar også kort hva uskarphetsrelasjonen gir uttrykk for.

LØSNING:

Heisenbergs uskarphetsrelasjon er

$$\Delta p_x \Delta x \geq \hbar/2.$$

Uskarpheten i posisjon og impuls er definert ved

$$\Delta x = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle^{1/2}, \Delta p_x = \langle (p_x - \langle p_x \rangle)^2 \rangle^{1/2}.$$

Dersom $\psi(x)$ er den aktuelle bølgefunksjon, er forventningsverdien av en operator $\hat{F}$ gitt ved:

$$\langle \hat{F} \rangle = \int dx \psi^*(x) \hat{F} \psi(x).$$

Uskarphetsrelasjonen gir uttrykk for at impulsen p_x og posisjonen x ikke kan være skarpt bestemt samtidig, dvs. i samme tilstand. Det minste produkt av Δp_x og Δx som noen tilstand kan ha, er $\hbar/2$.

- b) Gi et eksempel på en bølgefunksjon som har $\Delta p_x = 0$. Hva er Δx for denne bølgefunksjonen? Angi en operator som har denne bølgefunksjonen som egenfunksjon.

LØSNING:

$$\psi(x) = \exp(ik_x x),$$

der $k_x = p_x/\hbar$ og p_x er impulsen i x -retning har $\Delta p_x = 0$ og $\Delta x = \infty$. $\exp(ik_x x)$ er egenfunksjon for impuls-operatoren $\hat{p}_x = (\hbar/i)\partial/\partial x$.

- c) For to hermiteske operatorer som har kommutatoren

$$[\hat{Q}, \hat{P}] = i\hbar \hat{K}$$

gjelder det

$$\Delta Q \cdot \Delta P \geq \frac{\hbar}{2} |\langle \hat{K} \rangle|, \quad (2)$$

der $\langle \hat{K} \rangle$ er forventningsverdien av operatoren $\hat{K}$ i en bestemt kvantemekanisk tilstand. Skriv opp definisjonene av ΔQ og ΔP . Gjør dernest rede for hvordan uskarphetsrelasjonen i pkt. a) framkommer som et spesialtilfelle av det vi her har oppgitt. Vis også at for en fri partikkel med energi E og masse m så gjelder:

$$\Delta E \cdot \Delta x \geq \hbar \frac{|\langle \hat{p}_x \rangle|}{2m}.$$

LØSNING:

Uskarpheten i de fysiske størrelsene er definert ved

$$\Delta Q = \langle (\hat{Q} - \langle \hat{Q} \rangle)^2 \rangle^{1/2}, \Delta P = \langle (\hat{P} - \langle \hat{P} \rangle)^2 \rangle^{1/2}.$$

Fra pkt. a) har vi

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar$$

som gir når innsatt i ligningen

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar/2$$

q.e.d.

En fri partikkel i én dimensjon har:

$$E = \frac{p_x^2}{2m}$$

og

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m}.$$

Dermed er

$$\left[\frac{\hat{p}_x^2}{2m}, \hat{x} \right] = \frac{1}{2m} (\hat{p}_x [\hat{p}_x, \hat{x}] + [\hat{p}_x, \hat{x}] \hat{p}_x) \quad (3)$$

$$= -i \frac{\hbar}{m} \hat{p}_x \quad (4)$$

som innsatt i den generelle uskarphetsrelasjonen ovenfor (2) gir

$$\Delta E \cdot \Delta x \geq \frac{\hbar}{2m} |\langle \hat{p}_x \rangle|$$

q.e.d.

d) La A og B være to vilkårlige hermiteske operatorer som oppfyller

$$[\hat{A}, \hat{B}] = 0.$$

Finnes det da tilstander der både $\Delta A = 0$ og $\Delta B = 0$? Begrunn svaret.

LØSNING:

To operatorer som kommuterer kan ha felles egenfunksjoner. I tilstandene tilsvarende de felles egenfunksjonene vil de tilsvarende fysiske størrelsene til $\hat{A}$ og $\hat{B}$ begge være skarpt bestemt, og vi har både $\Delta A = 0$ og $\Delta B = 0$.

Oppgave 2. Kvantestatistikk

Vi ser på to partikler som befinner seg i en én-dimensjonal boks med bredde a , der potensialet er

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{når } -a/2 \leq x \leq a/2 \\ \infty & \text{ellers.} \end{cases} \quad (5)$$

Vi antar at én av partiklene befinner seg i grunntilstanden beskrevet ved bølgefunksjonen

$$\psi_1(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) & \text{når } -a/2 \leq x \leq a/2 \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases} \quad (6)$$

og egenenergien

$$E_1 = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi}{a}\right)^2. \quad (7)$$

Den andre partikkelen befinner seg i den første eksiterte tilstanden beskrevet ved bølgefunksjonen

$$\psi_1(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) & \text{når } -a/2 \leq x \leq a/2 \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases} \quad (8)$$

og egenenergien

$$E_2 = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{2\pi}{a}\right)^2. \quad (9)$$

I denne oppgaven kan du få bruk for følgende integral:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} du \, u^2 \cos^2 u = \frac{\pi}{4} \left(\frac{1}{6} \pi^2 - 1 \right). \quad (10)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} du \, u^2 \sin^2 u = \pi \left(\frac{1}{3} \pi^2 - \frac{1}{2} \right), \quad (11)$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} du \, u \cos u \sin 2u = \frac{8}{9}. \quad (12)$$

- a) Vi ser først på tilfellet der partiklene er spinnløse. Bestem midlere avstand $r_{12} = \langle (\hat{x}_1 - \hat{x}_2)^2 \rangle^{1/2}$ mellom partiklene, der $\hat{x}_1$ er posisjons-operatoren til partikkel 1 og $\hat{x}_2$ er posisjons-operatoren til partikkel 2, når

1. Partiklene er ulike.
2. Partiklene er identiske fermioner.
3. Partiklene er identiske bosoner.

Kommentér resultatet.

LØSNING

Midlere avstand er gitt ved

$$r_{12}^2 = \langle \hat{x}_1^2 \rangle + \langle \hat{x}_2^2 \rangle - 2\langle \hat{x}_1 \hat{x}_2 \rangle. \quad (13)$$

To-partikkel bølgefunksjonen er

- 1.

$$\psi_u(x_1, x_2) = \psi_1(x_1)\psi_2(x_2) \quad (14)$$

når partiklene er ulike,

- 2.

$$\psi_F(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_1(x_1)\psi_2(x_2) - \psi_1(x_2)\psi_2(x_1)] \quad (15)$$

når partiklene er identiske fermionener og

- 3.

$$\psi_B(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_1(x_1)\psi_2(x_2) + \psi_1(x_2)\psi_2(x_1)] \quad (16)$$

når partiklene er identiske bosoner.

For ulike partikler har vi:

$$\langle \hat{x}_1^2 \rangle_u = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 |\psi_1(x_1)|^2 |\psi_2(x_2)|^2 x_1^2, \quad (17)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 |\psi_1(x_1)|^2 x_1^2, \quad (18)$$

$$= \frac{2}{a} \int_{-a/2}^{a/2} dx_1 \cos^2\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) x_1^2, \quad (19)$$

$$= \frac{2}{a} \left(\frac{a}{\pi}\right)^3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} du u^2 \cos^2 u, \quad (20)$$

$$= a^2 \frac{2}{\pi^3} \frac{\pi}{4} \left(\frac{1}{6} \pi^2 - 1 \right), \quad (21)$$

$$= a^2 \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{2\pi^2} \right). \quad (22)$$

$$\langle \hat{x}_2^2 \rangle_{\text{u}} = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 |\psi_1(x_1)|^2 |\psi_2(x_2)|^2 x_2^2, \quad (23)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 |\psi_2(x_2)|^2 x_2^2, \quad (24)$$

$$= \int_{-a/2}^{a/2} dx_2 \frac{2}{a} \sin^2\left(\frac{2\pi x_2}{a}\right) x_2^2, \quad (25)$$

$$= \frac{2}{a} \left(\frac{a}{2\pi}\right)^3 \int_{-\pi}^{\pi} du u^2 \sin^2 u, \quad (26)$$

$$= a^2 \frac{2}{\pi^3} \pi \left(\frac{1}{3} \pi^2 - \frac{1}{2} \right), \quad (27)$$

$$= a^2 \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{8\pi^2} \right). \quad (28)$$

$$\langle \hat{x}_1 \hat{x}_2 \rangle_{\text{u}} = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 |\psi_1(x_1)|^2 |\psi_2(x_2)|^2 x_1 x_2, \quad (29)$$

$$= 0. \quad (30)$$

Dermed er

$$r_{12} = a \left[\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{2\pi^2} \right) + \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{8\pi^2} \right) \right]^{1/2}, \quad (31)$$

$$= a \left[\frac{1}{6} - \frac{5}{8\pi^2} \right]^{1/2} \quad (32)$$

når partiklene er ulike.

For fermioner og bosoner er

$$|\psi(x_1, x_2)|_{F/B}^2 = \frac{1}{2} [|\psi_1(x_1)|^2 |\psi_2(x_2)|^2 + |\psi_1(x_2) \psi_2(x_1)|^2] \mp \text{Re} [\psi_1^*(x_1) \psi_2(x_1) \psi_2^*(x_2) \psi_1(x_2)] \quad (33)$$

Vi beregner dermed

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 x_1^2 \psi_1^*(x_1) \psi_2(x_1) \psi_2^*(x_2) \psi_1(x_2) = 0, \quad (34)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 x_2^2 \psi_1^*(x_1) \psi_2(x_1) \psi_2^*(x_2) \psi_1(x_2) = 0, \quad (35)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 x_1 x_2 \psi_1^*(x_1) \psi_2(x_1) \psi_2^*(x_2) \psi_1(x_2) = \langle 1 | \hat{x} | 2 \rangle \langle 2 | \hat{x} | 1 \rangle \quad (36)$$

Vi bruker

$$\langle 1 | \hat{x} | 2 \rangle = \frac{2}{a} \int_{-a/2}^{a/2} dx \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) x, \quad (37)$$

$$= \frac{2}{a} \left(\frac{a}{\pi}\right)^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} du u \cos u \sin 2u, \quad (38)$$

$$= \frac{2}{a} \left(\frac{a}{\pi}\right)^2 \frac{8}{9}, \quad (39)$$

$$= a \frac{16}{9\pi^2}. \quad (40)$$

Vi finner dermed

$$\langle \hat{x}_1^2 \rangle_{F/B} = \frac{1}{2} [\langle \hat{x}_1^2 \rangle_u + \langle \hat{x}_2^2 \rangle_u] , \quad (41)$$

$$= \frac{1}{2} (r_{12})_u^2, \quad (42)$$

$$= a^2 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} - \frac{5}{8\pi^2} \right) , \quad (43)$$

$$= \langle \hat{x}_2^2 \rangle_{F/B} \quad (44)$$

$$\langle \hat{x}_1 \hat{x}_2 \rangle_{F/B} = \mp |\langle 1 | \hat{x} | 2 \rangle|^2 , \quad (45)$$

$$= \mp a^2 \left(\frac{16}{9\pi^2} \right)^2 \quad (46)$$

Vi finner dermed

$$(r_{12})_{F/B}^2 = a^2 \left(\frac{1}{6} - \frac{5}{8\pi^2} \pm 2 \left(\frac{16}{9\pi^2} \right)^2 \right) \quad (47)$$

når partiklene er identiske fermioner eller bosoner.

Vi ser dermed at vi har

$$(r_{12})_B < (r_{12})_u < (r_{12})_F \quad (48)$$

som vi skulle forvente siden bosoner effektivt tiltrekker hverandre mens fermioner effektivt frastøter hverandre p.g.a. Pauli-prinsippet.

- b) Vi antar nå at de to partiklene begge er elektroner. Vi antar at spinn-egenfunksjonene til det første og det andre elektronet er gitt ved henholdsvis $\chi_{\pm}(1)$ og $\chi_{\pm}(2)$, der '+' svarer til en spinn opp tilstand og '-' svarer til en spinn ned tilstand. Hvilke egenverdier for total-spinn, S , og total-spinn langs z -aksen, S_z , er mulige? Hva er to-partikkel spinn-egenfunksjonene med disse S - og S_z -egenverdiene?

LØSNING

Det er to spinn halv partikler. Total spinnet kan da være $S = 0$ eller $S = 1$. For $S = 0$ må spinn-komponenten langs z -aksen også være $S_z = 0$. For $S = 1$ kan vi ha $S_z = -1$, $S_z = 0$ og $S_z = 1$. Tilstandene med $S = 1$ og $S_z = 1$ må da være gitt ved

$$\chi_{1,1} = \chi_+(1)\chi_+(2) . \quad (49)$$

Tilsvarende er tilstanden $S = 1$, $S_z = -1$ gitt ved

$$\chi_{1,-1} = \chi_-(1)\chi_-(2) . \quad (50)$$

Vi kan nå observere at begge disse tilstandene er symmetriske ved ombytte av partiklene. Dermed må også spinn-tilstanden med samme totale spinn, $S = 1$ og S_z , være symmetrisk ved ombytte av de to partiklene:

$$\chi_{1,0} = \frac{1}{\sqrt{2}} [\chi_+(1)\chi_-(2) + \chi_-(1)\chi_+(2)] . \quad (51)$$

Tilsvarende, må egentilstandene tilsvarende spinn $S = 0$ og $S_z = 0$ være ortogonal til disse tilstandene. Dermed er

$$\chi_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{2}} [\chi_+(1)\chi_-(2) - \chi_-(1)\chi_+(2)] . \quad (52)$$

Oppgave 3. Spredning

Du kan i denne oppgaven få bruk for følgende relasjoner:

$$\int x \sin(ax) dx = \frac{1}{a^2} \sin(ax) - \frac{x}{a} \cos(ax) + C . \quad (53)$$

$$\int_0^\infty x \sin(bx) \exp(-cx^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4} bc^{-3/2} \exp(-b^2/4c), c > 0 \quad (54)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots , \quad (55)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots , \quad (56)$$

$$\exp x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots . \quad (57)$$

- a) Gi en fysikalsk definisjon av det differensielle spredningstverrsnitt, $d\sigma/d\Omega$.

I resten av oppgaven skal vi betrakte kvantemekanisk spredning som et stasjonært problem. Vi ser på spredning av partikler med masse m på et potensial $V(\vec{r})$. Innkommende bølge er gitt ved $\psi_{\text{inn}} = \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r})$. Det antas at $V(\vec{r})$ avtar raskt nok til at den spredte bølge for tilstrekkelig store $r = |\vec{r}|$ kan uttrykkes ved:

$$\psi_{\text{spredt}} = \psi(\vec{r}) - \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) \approx f(\theta, \phi) \frac{\exp(ikr)}{r}, \quad (58)$$

der

$$f(\theta, \phi) = -\frac{1}{4\pi} \int d^3r' \exp(-i\vec{k}_f \cdot \vec{r}') U(\vec{r}') \psi(\vec{r}') \quad (59)$$

kalles spredningamplituden, $\psi(\vec{r})$ er den totale bølgefunksjonen for problemet, $k = |\vec{k}|$, $\vec{k}_f = k\vec{r}/r$ og $U(\vec{r}) = 2mV(\vec{r})/\hbar^2$.

LØSNING

Det differensielle spredningstverrsnittet er definert ved

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\# \text{ partikler spredt inn i } d\Omega \text{ pr. tidsenhet}}{d\Omega(\# \text{ innfallende partikler pr. flate og tidsenhet})}, \quad (60)$$

der $d\Omega$ er romvinkelen.

- b) Hva er spredningsamplituden $f^B(\theta, \phi)$ i første Born-approksimasjon for et generelt potensial $V(\vec{r})$? Vis (på grunnlag av ovenstående) at for et sentralsymmetrisk potensial ($V(\vec{r}) = V(r)$) så kan spredningsamplituden i første Born-approksimasjon uttrykkes ved:

$$f^B(\theta) = f^B(q) = -\frac{2m}{\hbar^2 q} \int_0^\infty dr r \sin(qr) V(r), \quad (61)$$

der $q = |\vec{q}|$ og $\vec{q} = \vec{k}_f - \vec{k}$.

I hele resten av oppgaven antar vi at situasjonen er slik at første Born-approksimasjon kan nyttes.

LØSNING

Første Born-approksimasjon fåes ved å nytte den innfallende bølge $\exp(i\vec{k} \cdot \vec{r})$ for $\psi(\vec{r})$ i det oppgitte uttrykk for $f(\theta, \phi)$, altså:

$$f^B(\theta, \phi) = -\frac{1}{4\pi} \int d^3r' \exp(-\vec{k}_f \cdot \vec{r}') U(\vec{r}') \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}'), \quad (62)$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \int d^3r' \exp(-(\vec{k}_f - \vec{k}) \cdot \vec{r}') U(\vec{r}'), \quad (63)$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \int d^3r' \exp(-\vec{q} \cdot \vec{r}') U(\vec{r}') \quad (64)$$

$$(65)$$

Vi antar så $V(\vec{r}) = V(r)$, dvs. $U(\vec{r}) = U(r)$ og får da:

$$f^B(\theta, \phi) = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^\pi d\theta' \sin \theta' \int_0^\infty dr r^2 \exp(-i\vec{q} \cdot \vec{r}) U(r). \quad (66)$$

Vi legger z -aksen parallelt med $\vec{q}$ og får da videre:

$$f^B(\theta, \phi) = f^B(q), \quad (67)$$

$$= -\frac{1}{4\pi} 2\pi \int_0^\infty dr r^2 U(r) \int_0^\pi d\theta' \sin \theta' \exp(-iqr \cos \theta'), \quad (68)$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^\infty dr r^2 U(r) \left[\frac{\exp(-iqr \cos \theta')}{iqr} \right]_0^\pi, \quad (69)$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^\infty dr r^2 U(r) \frac{1}{qr} \frac{[\exp(iqr) - \exp(-iqr)]}{i}, \quad (70)$$

$$= -\frac{1}{q} \int_0^\infty dr r \sin(qr) U(r), \quad (71)$$

$$= -\frac{2m}{\hbar^2 q} \int_0^\infty dr r \sin(qr) V(r) \quad (72)$$

q.e.d.

- c) Beregn $f^B(q)$ og $d\sigma^B/d\Omega$ for partikler med masse m og energi $E = \hbar^2 k^2/2m$ som spres på potensialet:

$$V(r) = \begin{cases} V_0 & \text{for } r \leq a, \\ 0 & \text{for } r > a. \end{cases} \quad (73)$$

Det kan benyttes som kjent at

$$\frac{d\sigma^B}{d\Omega} = |f^B(q)|^2. \quad (74)$$

LØSNING

Vi betrakter her spredning på det sentralsymmetriske potensialet

$$V(r) = \begin{cases} V_0 & \text{for } r \leq a \\ 0 & \text{for } r > a \end{cases} \quad (75)$$

og får da ved hjelp av ligningen ovenfor

$$f^B(q) = -\frac{2m}{\hbar^2 q} \int_0^\infty dr r \sin(qr) V_0, \quad (76)$$

$$= -\frac{2mV_0}{\hbar^2 q} \left[\frac{1}{q^2} \sin(qr) - \frac{r}{q} \cos(qr) \right], \quad (77)$$

$$= -\frac{2mV_0}{\hbar^2 q^3} (\sin(qa) - qa \cos(qa)), \quad (78)$$

der $q = 2k \sin(\theta/2)$ og dermed

$$\frac{d\sigma^B}{d\Omega} |f^B(q)|^2 = \left(\frac{2mV_0}{\hbar^2 q^3} \right) [\sin(qa) - qa \cos(qa)]^2. \quad (79)$$

d) Beregn også $f^B(q)$ og $d\sigma^B/d\Omega$ for samme situasjon som i pkt. c), men med potensialet

$$V(r) = V_0 \exp\left(-\frac{r^2}{2(\xi a)^2}\right), \quad (80)$$

der

$$\xi = \left(\frac{2}{9\pi}\right)^{1/6}. \quad (81)$$

Dersom en måler spredning for slike q at $qa \ll 1$, kan en da ut fra spredningseksperimentene skille mellom potensialene gitt i dette punkt og det gitt i pkt. c)? Begrunn svaret.

LØSNING

Vi betrakter her spredning på det sentralsymmetriske potensialet:

$$V(r) = V_0 \exp\left(-\frac{r^2}{2(\xi a)^2}\right), \quad (82)$$

der

$$\xi = \left(\frac{2}{9\pi}\right)^{1/6}. \quad (83)$$

Vi får da for Born sprednings-amplituden:

$$f^B(q) = -\frac{2mV_0}{\hbar^2 q} \int_0^\infty dr r \sin(qr) \exp\left(-\frac{r^2}{2(\xi a)^2}\right), \quad (84)$$

$$= -\frac{2mV_0}{\hbar^2 q} \frac{\sqrt{\pi}}{4} q \left(\frac{1}{2(\xi a)^2}\right)^{-3/2} \exp\left(-\frac{q^2}{4\frac{1}{2(\xi a)^2}}\right), \quad (85)$$

$$= -\frac{2mV_0}{\hbar^2} \frac{\sqrt{\pi}}{4} 2^{3/2} \xi^3 a^3 \exp\left(-\frac{(\xi a)^2 q^2}{2}\right), \quad (86)$$

$$= -\frac{2mV_0}{3\hbar^2} a^3 \exp\left(-\left(\frac{2}{9\pi}\right)^{1/3} a^2 q^2 / 2\right). \quad (87)$$

Dermed er

$$\frac{d\sigma^B}{d\Omega} = \left(\frac{2mV_0}{3\hbar^2}\right)^2 a^6 \exp\left(-\left(\frac{2}{9\pi}\right)^{1/3} a^2 q^2\right). \quad (88)$$

Vi setter indeks c på $f^B(q)$ og $d\sigma^B/d\Omega$ fra pkt. c) og indeks d på de tilsvarende rekkeutviklingene fra pkt. d). Vi får da ved hjelp av de oppgitte rekkeutviklingene for $qa \ll 1$:

$$f_c^B(q) = -\frac{2mV_0}{\hbar^2 q^3} \left[qa - \frac{(qa)^3}{6} - qa + \frac{(qa)^3}{2} + \mathcal{O}((qa)^5) \right], \quad (89)$$

$$= -\frac{2mV_0}{\hbar^2 q^3} \left[\frac{1}{3}(qa)^3 + \mathcal{O}((qa)^5) \right], \quad (90)$$

$$= -\frac{2mV_0}{3\hbar^2} a^3 \quad (91)$$

og dermed

$$\frac{d\sigma_c^B}{d\Omega} \approx \left(\frac{2mV_0}{3\hbar^2} \right)^2 a^6. \quad (92)$$

Tilsvarende er

$$f_d^B(q) = -\frac{2mV_0}{3\hbar^2} a^3 (1 + \mathcal{O}((qa)^2)), \quad (93)$$

$$= -\frac{2mV_0}{3\hbar^2} a^3 \quad (94)$$

og dermed er

$$\frac{d\sigma_d^B}{d\Omega} = \left(\frac{2mV_0}{3\hbar^2} \right)^2 a^6. \quad (95)$$

Vi ser at $d\sigma_c^B/d\Omega$ og $d\sigma_d^B/d\Omega$ er uavhengige av q og like store for $qa \ll q$. For $qa \ll 1$ kan en derfor ikke ved spredningseksperimenter skille mellom potensialene gitt i pkt. c) og pkt. d).

Merknad: At vi ikke kan skille mellom disse potensialene ut fra $f^B(q)$ for $qa \ll 1$ kan vi også forstå ved å tenke på at $f^B(q)$ er en Fourieromvending av det spredende potensialet. Ingen av disse potensialene inneholder noen vesentlig Fourierkomponent (utenom konstantledd) ved $q \ll 1/a$. For $qa \ll 1$ må derfor $f^B(q)$ bli q -uavhengig for begge potensialene. Spredningsstyrken for potensialene kunne vi finne ved å sette $\sin(qr) \approx qr$ og dermed

$$f_c^B(q \ll a) \approx f_d^B(q \ll a) \approx -\frac{2}{3} \frac{mV_0}{\hbar^2} a^3 \quad (96)$$

som vi fant ovenfor.