

Løsning, eksamen TFY4205 Kvantemekanikk II

Torsdag 8. desember 2011

- 1a) Et kort og fullgodt svar er at en stasjonær tilstand $|\psi\rangle$ er en løsning av den tidsuavhengige Schrödingerligningen

$$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle, \quad (1)$$

der H er Hamilton-operatoren (som ikke kan være eksplisitt tidsavhengig). Tilstandsvektoren $|\psi\rangle$ er en egenvektor til H med egenverdi E , og den fysiske tolkningen er at E er energien.

At forventningsverdien av kommutatoren $[A, H]$ er null i en stasjonær tilstand, følger direkte av ligning (1), slik:

$$\langle[A, H]\rangle = \langle\psi|(AH - HA)|\psi\rangle = \langle\psi|(AE - EA)|\psi\rangle = 0.$$

For å regne ut $\langle\psi|AH|\psi\rangle$ lar vi H virke mot høyre, og for å regne ut $\langle\psi|HA|\psi\rangle$ lar vi H virke mot venstre.

Her er et langt svar, som går tilbake til definisjonen. En stasjonær tilstand er pr. definisjon stasjonær, altså tidsuavhengig. I kvantemekanikken betyr det at enhver forventningsverdi

$$\langle A \rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle \quad (2)$$

er konstant i tiden når A er en observabel som ikke har en eksplisitt tidsavhengighet, og tilstandsvektoren $|\psi\rangle$ har en tidsavhengighet som følger av den tidsavhengige Schrödingerligningen

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi\rangle = H |\psi\rangle.$$

Med dette som utgangspunkt kan vi resonnerer videre på to måter.

Resonnement 1: Hermitisk konjugering av Schrödingerligningen gir at

$$-i\hbar \frac{d}{dt} \langle\psi| = \langle\psi| H.$$

Tidsderivasjon av ligning (2), med A tidsuavhengig og $|\psi\rangle$ en stasjonær tilstand, gir at

$$\begin{aligned} 0 &= i\hbar \frac{d}{dt} \langle A \rangle = i\hbar \left(\left(\frac{d}{dt} \langle\psi| \right) A |\psi\rangle + \langle\psi| A \left(\frac{d}{dt} |\psi\rangle \right) \right) \\ &= -\langle\psi| H A |\psi\rangle + \langle\psi| A H |\psi\rangle = \langle\psi| [A, H] |\psi\rangle. \end{aligned}$$

Dette resonnementet sier ikke hva som skjer dersom A er eksplisitt tidsavhengig.

Resonnement 2, som leder fram til ligning (1): Hvis to tilstandsvektorer $|\psi_1\rangle$ og $|\psi_2\rangle$ har den egenskapen at $\langle\psi_1|A|\psi_1\rangle = \langle\psi_2|A|\psi_2\rangle$ for enhver hermitisk operator A , så må de være like opp til en fasefaktor, altså

$$|\psi_2\rangle = e^{i\alpha} |\psi_1\rangle,$$

med en reell fase α . En tidsavhengig tilstandsvektor $|\psi, t\rangle$ beskriver altså en stasjonær tilstand dersom hele tidsavhengigheten sitter i en fasefaktor, slik at

$$|\psi, t\rangle = e^{i\alpha(t)} |\psi, 0\rangle .$$

For at dette skal være en løsning av den tidsavhengige Schrödingerligningen, så må $|\psi, 0\rangle$ være en løsning av den tidsuavhengige Schrödingerligningen, med en energi E , og vi må ha at

$$\alpha(t) = -\frac{Et}{\hbar} .$$

Av den tidsuavhengige Schrödingerligningen følger at forventningsverdien av $[A, H]$ er null, som vist ovenfor.

Kommentar: En kunne tro at beviset vårt her, at $\langle [A, H] \rangle = 0$ i en egentilstand for H , kan omformuleres og brukes til å bevise at den kanoniske kommutasjonsrelasjonen $[x, p_x] = i\hbar$ er umulig. La for eksempel $|\psi\rangle$ være en egenvektor for x , i denne tilstanden må vi ha at

$$i\hbar = \langle i\hbar \rangle = \langle [x, p_x] \rangle = \langle \psi | [x, p_x] | \psi \rangle = 0 .$$

Feilen med dette forsøket på bevis er at en forventningsverdi $\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle$ er veldefinert bare dersom $|\psi\rangle$ er normerbar, altså $\langle \psi | \psi \rangle < \infty$. Vi forutsatte stilltiende at den egentilstanden til H som vi brukte, var normerbar, altså tilhørte den diskrete delen av energispektret. Denne forutsetningen burde kanskje ha vært nevnt eksplisitt. Hverken posisjonsoperatoren x eller impulsoperatoren p_x har en eneste normerbar egenvektor med en diskret egenverdi. Det kan de ikke ha på grunn av den kanoniske kommutasjonsrelasjonen, som dette argumentet viser.

1b) Vi bruker Leibniz-regelen

$$[AB, C] = ABC - CAB = ACB - CAB + ABC - ACB = [A, C] B + A [B, C]$$

og får at

$$[\vec{r} \cdot \vec{p} + \vec{p} \cdot \vec{r}, H] = ([\vec{r}, H]) \cdot \vec{p} + \vec{r} \cdot ([\vec{p}, H]) + ([\vec{p}, H]) \cdot \vec{r} + \vec{p} \cdot ([\vec{r}, H]) . \quad (3)$$

Ta en komponent av $\vec{r}$, f.eks. x . Ved hjelp av Leibniz-regelen

$$[A, BC] = [A, B] C + B [A, C]$$

får vi at

$$[x, H] = \frac{1}{2m_e} [x, \vec{p}^2] = \frac{1}{2m_e} [x, p_x^2] = \frac{1}{2m_e} ([x, p_x] p_x + p_x [x, p_x]) = \frac{i\hbar}{m_e} p_x .$$

Av dette konkluderer vi at

$$[\vec{r}, H] = \frac{i\hbar}{m_e} \vec{p} . \quad (4)$$

Tilsvarende har vi at

$$[p_x, H] = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left[p_x, \frac{1}{r} \right] = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{r^3} [p_x, x] = -i\hbar \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{r^3} ,$$

og vi konkluderer at

$$[\vec{p}, H] = -i\hbar \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} . \quad (5)$$

Her trengs kanskje en nærmere forklaring. Husk at vi kan representere p_x som en derivasjonsoperator:

$$p_x = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} .$$

Hvis $f = f(x, y, z) = 1/r = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, og vi skal beregne kommutatoren $[p_x, f]$, så kan vi la den operere på en vilkårlig bølgefunksjon $\psi = \psi(x, y, z)$. Vi har at

$$[p_x, f] \psi = p_x f \psi - f p_x \psi = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} (f \psi) - f \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \psi = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial f}{\partial x} \psi .$$

Altså er

$$[p_x, f] = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial f}{\partial x} .$$

Med $f = 1/r$ er

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{x}{r^3} .$$

Ligningene (4) og (5) innsatt i (3) gir at

$$[\vec{r} \cdot \vec{p} + \vec{p} \cdot \vec{r}, H] = i\hbar \left(\frac{2}{m_e} \vec{p}^2 - 2 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) = i\hbar (4T + 2V) .$$

I en stasjonær tilstand er forventningsverdien av kommutatoren lik null, i følge punkt a) ovenfor, og det gir virialteoremet, at

$$2 \langle T \rangle + \langle V \rangle = 0$$

i den stasjonære tilstanden. Hvis $H |\psi\rangle = (T + V) |\psi\rangle = E |\psi\rangle$, så er dessuten

$$\langle T \rangle + \langle V \rangle = \langle \psi | (T + V) | \psi \rangle = E .$$

Følgelig er

$$\langle T \rangle = -E , \quad \langle V \rangle = 2E .$$

Kommentar: Dette viser at energien E må være negativ for at virialteoremet skal holde. Den potensielle energien V er jo alltid negativ, og den kinetiske energien T er alltid positiv. Bevis for at $\langle T \rangle > 0$: vi har at

$$\langle T \rangle = \frac{1}{2m_e} (\langle p_x^2 \rangle + \langle p_y^2 \rangle + \langle p_z^2 \rangle) ,$$

og forventningsverdien av p_x^2 er garantert ikke-negativ:

$$\langle p_x^2 \rangle = \langle \psi | p_x^2 | \psi \rangle = \langle \phi | \phi \rangle \geq 0 , \quad \text{der} \quad |\phi\rangle = p_x |\psi\rangle .$$

- 1c) Like etter at atomkjernen er blitt borte, er tilstanden fremdeles ψ_0 , og sannsynlighetsamplituden for å finne elektronet i impulsegentilstanden $\psi_{\vec{k}}$ er

$$\begin{aligned}
c_{\vec{k}} &= \int d^3\vec{r} (\psi_{\vec{k}}(\vec{r}))^* \psi_0(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{V}\pi a_0^3}} \int_0^\infty dr r^2 \int_{-1}^1 d(\cos \theta) \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-ikr \cos \theta} e^{-\frac{r}{a_0}} \\
&= \frac{2\pi}{\sqrt{\mathcal{V}\pi a_0^3}} \int_0^\infty dr r^2 e^{-\frac{r}{a_0}} \int_{-1}^1 d(\cos \theta) e^{-ikr \cos \theta} \\
&= \frac{2\pi}{\sqrt{\mathcal{V}\pi a_0^3}} \int_0^\infty dr r^2 e^{-\frac{r}{a_0}} \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{ikr} \\
&= \frac{2\pi}{\sqrt{\mathcal{V}\pi a_0^3}} \frac{1}{ik} \int_0^\infty dr r \left(e^{-(\frac{1}{a_0} - ik)r} - e^{-(\frac{1}{a_0} + ik)r} \right) \\
&= \frac{2\pi}{\sqrt{\mathcal{V}\pi a_0^3}} \frac{a_0^2}{ik} \left(\frac{1}{(1 - ik a_0)^2} - \frac{1}{(1 + ik a_0)^2} \right) = \frac{2\pi}{\sqrt{\mathcal{V}\pi a_0^3}} \frac{a_0^2}{ik} \frac{4ika_0}{(1 + k^2 a_0^2)^2} \\
&= \sqrt{\frac{\pi a_0^3}{\mathcal{V}}} \frac{8}{(1 + k^2 a_0^2)^2} ,
\end{aligned}$$

når vi innfører polarkoordinater r, θ, φ med bølgetallsvektoren $\vec{k}$ som z -akse.

Det er forresten betryggende å se at vi får samme svar om vi bytter om integrasjonsrekkefølgen:

$$\begin{aligned}
c_{\vec{k}} &= \dots = \frac{2\pi}{\sqrt{\mathcal{V}\pi a_0^3}} \int_{-1}^1 d(\cos \theta) \int_0^\infty dr r^2 e^{-r \left(\frac{1}{a_0} + ik \cos \theta \right)} \\
&= \frac{2\pi}{\sqrt{\mathcal{V}\pi a_0^3}} \int_{-1}^1 d(\cos \theta) \frac{2a_0^3}{(1 - ik a_0 \cos \theta)^3} \\
&= \frac{2\pi}{\sqrt{\mathcal{V}\pi a_0^3}} \frac{a_0^2}{ik} \left(\frac{1}{(1 - ik a_0)^2} - \frac{1}{(1 + ik a_0)^2} \right) = \dots
\end{aligned}$$

Kontroll at den totale sannsynligheten er 1:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathcal{V}}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{k} |c_{\vec{k}}|^2 &= \frac{64\pi a_0^3}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{k} \frac{1}{(1 + k^2 a_0^2)^4} = \frac{64\pi a_0^3}{(2\pi)^3} 4\pi \int_{-\infty}^\infty dk \frac{k^2}{(1 + k^2 a_0^2)^4} \\
&= \frac{32}{\pi} \int_{-\infty}^\infty du \frac{u^2}{(1 + u^2)^4} = 1 ,
\end{aligned}$$

når vi substituerer $u = ka_0$.

Merk at $c_{\vec{k}}$ er impulsrepresentasjonen av bølgefunksjonen i grunntilstanden til hydrogenatomet (bortsett fra at normeringsfaktoren blir en litt annen når vi normerer slik at integralet over alle impulser er lik 1, i stedet for summen over de diskrete bølgetallsvektorene).

- 1d) Når impulsen er kvantisert til $\vec{p} = \hbar \vec{k}$, så er energien til det frie elektronet kvantisert til

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m_e} = \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m_e} .$$

Den gjennomsnittlige energien er da (sammenlign med regnestykket ovenfor)

$$\begin{aligned}\langle E \rangle &= \frac{\mathcal{V}}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{k} |c_{\vec{k}}|^2 \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m_e} = \frac{64\pi a_0^3}{(2\pi)^3} 4\pi \frac{\hbar^2}{2m_e} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{k^4}{(1+k^2 a_0^2)^4} \\ &= \frac{32}{\pi} \frac{\hbar^2}{2m_e a_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{u^4}{(1+u^2)^4} = \frac{\hbar^2}{2m_e a_0^2},\end{aligned}$$

når vi igjen substituerer $u = ka_0$.

Her har vi gjort regnestykket i impulsrepresentasjonen. Vi kan selvfølgelig gjøre det samme regnestykket i posisjonsrepresentasjonen, da ser det ut som følger:

$$\langle E \rangle = \frac{\langle \vec{p}^2 \rangle}{2m_e} = -\frac{\hbar^2}{2m_e} \int d^3\vec{r} \psi_0^* (\nabla^2 \psi_0) = \frac{\hbar^2}{2m_e} \int d^3\vec{r} (\nabla \psi_0)^* \cdot (\nabla \psi_0),$$

der det siste likhetstegnet bevises ved delvis integrasjon. Siden

$$\nabla \psi_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} \nabla e^{-\frac{r}{a_0}} = -\frac{1}{\sqrt{\pi a_0^5}} e^{-\frac{r}{a_0}} \nabla r = -\frac{1}{\sqrt{\pi a_0^5}} e^{-\frac{r}{a_0}} \frac{\vec{r}}{r},$$

er

$$\langle E \rangle = \frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{1}{\pi a_0^5} \int d^3\vec{r} e^{-\frac{2r}{a_0}} = \frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{1}{\pi a_0^5} 4\pi \int_0^{\infty} dr r^2 e^{-\frac{2r}{a_0}} = \frac{\hbar^2}{2m_e a_0^2}.$$

Det samme svaret kan vi få på en tredje måte ved hjelp av virialteoremet. Når atomkjernen plutselig forsvinner, så blir den potensielle energien til elektronet plutselig null, men den kinetiske energien er uforandret. Den gjennomsnittlige energien til det frie elektronet er lik den gjennomsnittlige kinetiske energien til elektronet i grunntilstanden til hydrogenatomet, som er $-E_1$ der E_1 er grunntilstandsenergien,

$$E_1 = -\frac{\hbar^2}{2m_e a_0^2}.$$

2a) Sannsynlighetsamplituden for å finne telefonnummeret 7 i ett forsøk er

$$c = \langle E7 | \phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{10}},$$

og sannsynligheten er

$$P = |c|^2 = \frac{1}{10}.$$

Sannsynligheten for å mislykkes $n-1$ ganger og så lykkes n -te gang, er

$$P_n = (1-P)^{n-1} P = \frac{9^{n-1}}{10^n}.$$

Det gjennomsnittlige antallet forsøk før en finner nummeret, er da

$$\langle n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} n P_n = P \sum_{n=1}^{\infty} n (1-P)^{n-1} = \frac{P}{(1-(1-P))^2} = \frac{1}{P} = 10.$$

Et knep for å summere rekken er å observere at

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots = \frac{d}{dx} (1 + x + x^2 + x^3 + \dots) = \frac{d}{dx} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2} .$$

Eller vi kan se direkte at

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \dots)^2 = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots .$$

Det gjennomsnittlige antallet forsøk med en klassisk datamaskinen er 5,5. Med denne naive søkemethoden er kvantedatamaskinen bare halvparten så effektiv som den klassiske.

Merk at når sannsynligheten for å lykkes i første forsøk er $1/10$, så kan vi anslå uten videre at vi trenger omtrent 10 forsøk for å lykkes. Det ble ikke spurt etter noe mer nøyaktig anslag enn som så.

2b) Vi sjekker at V er hermitisk:

$$V^\dagger = I^\dagger - 2(|\phi\rangle\langle\phi|)^\dagger = I - 2(\langle\phi|)^\dagger(|\phi\rangle)^\dagger = I - 2|\phi\rangle\langle\phi| = V .$$

Noen løser denne oppgaven ved å gå tilbake til definisjonen på hermitisitet, nemlig at $\langle a|V|b\rangle = (\langle b|V|a\rangle)^*$ for vilkårlige tilstandsvektorer $|a\rangle$ og $|b\rangle$:

$$\langle a|V|b\rangle = \langle a|b\rangle - 2\langle a|\phi\rangle\langle\phi|b\rangle = (\langle b|a\rangle - 2\langle b|\phi\rangle\langle\phi|a\rangle)^* = (\langle b|V|a\rangle)^* .$$

Og vi sjekker at V er unitær, det vil si at $V^{-1} = V^\dagger = V$:

$$V^2 = (I - 2|\phi\rangle\langle\phi|)^2 = I - 4|\phi\rangle\langle\phi| + 4|\phi\rangle\langle\phi|\phi\rangle\langle\phi| = I ,$$

der vi bruker at $\langle\phi|\phi\rangle = 1$.

2c) Vi definerer $|\psi\rangle = \cos\beta|\psi_1\rangle + \sin\beta|\psi_2\rangle$, og skal beregne $VU|\psi\rangle$.

Først observerer vi at

$$U|\psi\rangle = -\cos\beta|\psi_1\rangle + \sin\beta|\psi_2\rangle .$$

Dernest beregner vi

$$V|\psi_1\rangle = |\psi_1\rangle - 2|\phi\rangle\langle\phi|\psi_1\rangle = |\psi_1\rangle - \frac{6}{\sqrt{10}}|\phi\rangle = |\psi_1\rangle - \frac{18}{10}|\psi_1\rangle - \frac{6}{10}|\psi_2\rangle = -\frac{4}{5}|\psi_1\rangle - \frac{3}{5}|\psi_2\rangle ,$$

og

$$V|\psi_2\rangle = |\psi_2\rangle - 2|\phi\rangle\langle\phi|\psi_2\rangle = |\psi_2\rangle - \frac{2}{\sqrt{10}}|\phi\rangle = |\psi_2\rangle - \frac{6}{10}|\psi_1\rangle - \frac{2}{10}|\psi_2\rangle = -\frac{3}{5}|\psi_1\rangle + \frac{4}{5}|\psi_2\rangle ,$$

idet

$$\langle\phi|\psi_1\rangle = \frac{3}{\sqrt{10}} = \cos\alpha , \quad \langle\phi|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}} = \sin\alpha .$$

Uttrykt ved vinkelen α har vi at

$$\begin{aligned} V|\psi_1\rangle &= |\psi_1\rangle - 2\cos\alpha|\phi\rangle = (1 - 2\cos^2\alpha)|\psi_1\rangle - 2\cos\alpha\sin\alpha|\psi_2\rangle \\ &= -\cos(2\alpha)|\psi_1\rangle - \sin(2\alpha)|\psi_2\rangle , \\ V|\psi_2\rangle &= |\psi_2\rangle - 2\sin\alpha|\phi\rangle = -2\cos\alpha\sin\alpha|\psi_1\rangle + (1 - 2\sin^2\alpha)|\psi_2\rangle \\ &= -\sin(2\alpha)|\psi_1\rangle + \cos(2\alpha)|\psi_2\rangle . \end{aligned}$$

Vi får at

$$VU |\psi\rangle = -\cos \beta V |\psi_1\rangle + \sin \beta V |\psi_2\rangle = \cos \gamma |\psi_1\rangle + \sin \gamma |\psi_2\rangle$$

med

$$\begin{aligned}\cos \gamma &= \frac{4}{5} \cos \beta - \frac{3}{5} \sin \beta = \cos(2\alpha) \cos \beta - \sin(2\alpha) \sin \beta = \cos(\beta + 2\alpha) , \\ \sin \gamma &= \frac{3}{5} \cos \beta + \frac{4}{5} \sin \beta = \sin(2\alpha) \cos \beta + \cos(2\alpha) \sin \beta = \sin(\beta + 2\alpha) .\end{aligned}$$

2d) Vi har at

$$|\phi_1\rangle = VU |\phi\rangle = \cos(3\alpha) |\psi_1\rangle + \sin(3\alpha) |\psi_2\rangle$$

og

$$\begin{aligned}\cos(3\alpha) &= \frac{4}{5} \cos \alpha - \frac{3}{5} \sin \alpha = \frac{9}{5\sqrt{10}} , \\ \sin(3\alpha) &= \frac{3}{5} \cos \alpha + \frac{4}{5} \sin \alpha = \frac{13}{5\sqrt{10}} .\end{aligned}$$

Sannsynligheten for resultatet 7 hvis vi leser av telefonnummeret i denne tilstanden er

$$P_1(7) = \sin^2(3\alpha) = \frac{169}{250} = 0,676 .$$

Allerede en stor forbedring sammenlignet med 1/10.

Videre har vi at

$$|\phi_2\rangle = VU |\phi_1\rangle = \cos(5\alpha) |\psi_1\rangle + \sin(5\alpha) |\psi_2\rangle$$

og

$$\begin{aligned}\cos(5\alpha) &= \frac{4}{5} \cos(3\alpha) - \frac{3}{5} \sin(3\alpha) = -\frac{3}{25\sqrt{10}} , \\ \sin(5\alpha) &= \frac{3}{5} \cos(3\alpha) + \frac{4}{5} \sin(3\alpha) = \frac{79}{25\sqrt{10}} .\end{aligned}$$

Sannsynligheten for resultatet 7 hvis vi leser av telefonnummeret i denne tilstanden er

$$P_2(7) = \sin^2(5\alpha) = \frac{6241}{6250} = 0,99856 .$$

Vi kan ikke forlange mer!

Det er fullt mulig å regne ut de samme svarene rent numerisk. Vi har at

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = 0,321751 = 0,102416\pi = 0,102416 \times 180^\circ ,$$

og

$$3\alpha = 0,307248\pi , \quad 5\alpha = 0,512080\pi .$$

2e) Vi har sett at operasjonen $(VU)^n$ gir tilstanden

$$|\phi_n\rangle = (VU)^n|\phi\rangle = \cos((2n+1)\alpha)|\psi_1\rangle + \sin((2n+1)\alpha)|\psi_2\rangle.$$

Vi ønsker å få $\sin((2n+1)\alpha)$ til å bli nær 1, altså $(2n+1)\alpha \approx \pi/2$, eller

$$n \approx \frac{\pi}{4\alpha}.$$

Når antallet navn i telefonkatalogen, N , er stort, så vil

$$\alpha \approx \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{N}},$$

og det vil si at antallet operasjoner av typen VU bør være

$$n \approx \frac{\pi \sqrt{N}}{4}.$$

Antallet operasjoner er proporsjonalt med kvadratroten av antallet navn. Et sensasjonelt svar, siden det beste vi kan få til med en klassisk datamaskin er at antallet operasjoner er proporsjonalt med antallet navn!

Et helt annet spørsmål er om denne typen kvantedatamaskin noen gang kommer til å gjøre noen nytte for seg. Klassiske datamaskiner er så raske at katalogen minst må inneholde mange millioner navn før tiden det tar å søke etter et gitt nummer, spiller noen som helst rolle. Med $N = 10^6$, for eksempel, er $\sqrt{N} = 1000$, og et absolutt minimumskrav til kvantedatamaskinen er da at vi kan programmere inn en kvantemekanisk tilstand med en nøyaktighet på 10^{-3} . Det er neppe helt trivielt.

Problemet med en kvantedatamaskin er at den regner analogt, og det betyr at hvor nøyaktig den regner, avhenger av kvaliteten på komponentene den består av. Jo mer nøyaktig maskinen er laget, jo mer nøyaktig er den i stand til å regne.

På 1980-tallet arbeidet en gruppe ved Danmarks Tekniske Høyskole med å bygge en analog regnemaskin som kunne integrere generelle differensialligninger mye raskere enn en digital regnemaskin kan. De var stolte over å kunne oppnå en presisjon på 10^{-3} .