

Eksamen i Anvendt kvantemekanikk, fag SIF 4047

Onsdag 8. mai 2002

Løsninger

1a) Vi har at

$$(\vec{p} + e\vec{A})^2 = \vec{p}^2 + e\vec{p} \cdot \vec{A} + e\vec{A} \cdot \vec{p} + e^2 \vec{A}^2 .$$

Her er $\vec{p} \cdot \vec{A} = \vec{A} \cdot \vec{p}$, fordi $A_x = -By/2$, $A_y = Bx/2$, $A_z = 0$, og dermed $p_x A_x = A_x p_x$, $p_y A_y = A_y p_y$, $p_z A_z = A_z p_z$. Eller mer generelt: når vi velger gauge (justering) slik at $\nabla \cdot \vec{A} = 0$, så er $\vec{p} \cdot \vec{A} = \vec{A} \cdot \vec{p}$, fordi

$$\vec{p} \cdot \vec{A} \psi = -i\hbar \nabla \cdot (\vec{A} \psi) = -i\hbar (\nabla \cdot \vec{A}) \psi - i\hbar \vec{A} \cdot \nabla \psi = \vec{A} \cdot \vec{p} \psi$$

for en vilkårlig bølgefunksjon $\psi = \psi(\vec{r})$. Dermed har vi at

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2m} (\vec{p}^2 + 2e\vec{A} \cdot \vec{p} + e^2 \vec{A}^2) + \frac{e}{m} S_z B \\ &= \frac{1}{2m} \left(\vec{p}^2 + eB(-yp_x + xp_y) + \frac{e^2 B^2}{4} (x^2 + y^2) \right) + \frac{eB}{m} S_z . \end{aligned}$$

Vi setter inn $L_z = xp_y - yp_x$ og $\omega = eB/m$ og får det oppgitte uttrykket

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{1}{8} m\omega^2 (x^2 + y^2) + \frac{\omega}{2} (L_z + 2S_z) .$$

De fire operatorene H , p_z , S_z og L_z kommuterer innbyrdes, og kan derfor kvantiseres samtidig, det vil si at de har et fullstendig sett av felles egenfunksjoner. For en felles egenfunksjon ψ gjelder at

$$H\psi = E\psi , \quad p_z\psi = \hbar k_z\psi , \quad L_z\psi = m_l \hbar\psi , \quad S_z\psi = m_s \hbar\psi ,$$

der E , k_z , $m_l = 0, 1, 2, \dots$ og $m_s = \pm 1/2$ er kvantetall for henholdsvis H , p_z , S_z og L_z . Her er det to ledd i Hamilton-operatoren H som bare gir konstante bidrag til energien E , nemlig $p_z^2/(2m) = \hbar^2 k_z^2/(2m)$ og $\omega S_z = m_s \hbar \omega$ (leddet $\omega L_z/2 = m_l \hbar \omega/2$ gir også et konstant bidrag til E , men i tillegg er egenverdien til $p_x^2 + p_y^2$ avhengig av m_l).

Derfor kan vi løse det tredimensjonale problemet ved å løse det todimensjonale problemet der Hamilton-operatoren er

$$H' = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{1}{8} m\omega^2 (x^2 + y^2) + \frac{\omega}{2} (L_z + 2m_s \hbar) .$$

1b) Det er enklest å verifisere formlene ved å regne baklengs. Vi har at

$$u^* \frac{\partial}{\partial u^*} - u \frac{\partial}{\partial u} = \frac{x + iy}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) - \frac{x - iy}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) = iy \frac{\partial}{\partial x} - ix \frac{\partial}{\partial y} = \frac{L_z}{\hbar} .$$

Og at

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial}{\partial u^*} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) = -\frac{p_x^2 + p_y^2}{4\hbar^2} .$$

- 1c) Derivasjonsoperatorene $\partial/\partial u$ og $\partial/\partial u^*$ virker som om u og u^* er uavhengige variable. Derfor er

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u} \psi_n &= \mathcal{N}_n \frac{\partial}{\partial u} (u^n e^{-\gamma u u^*}) = \mathcal{N}_n (n u^{n-1} - \gamma u^* u^n) e^{-\gamma u u^*} = \left(\frac{n}{u} - \gamma u^*\right) \psi_n, \\ \frac{\partial}{\partial u^*} \psi_n &= \mathcal{N}_n \frac{\partial}{\partial u^*} (u^n e^{-\gamma u u^*}) = \mathcal{N}_n (-\gamma u^{n+1} e^{-\gamma u u^*}) = -\gamma u \psi_n.\end{aligned}$$

Det gir da at

$$L_z \psi_n = \hbar \left(u^* \frac{\partial}{\partial u^*} - u \frac{\partial}{\partial u} \right) \psi_n = -n \hbar \psi_n.$$

Dessuten gir det at

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial u \partial u^*} \psi_n &= \frac{\partial}{\partial u} (-\gamma u \psi_n) = -\gamma \psi_n - \gamma u \left(\frac{n}{u} - \gamma u^* \right) \psi_n \\ &= \left(-(n+1)\gamma + \gamma^2 |u|^2 \right) \psi_n.\end{aligned}$$

Følgelig er

$$\begin{aligned}H' \psi_n &= \left(-\frac{2\hbar^2}{m} \frac{\partial^2}{\partial u \partial u^*} + \frac{1}{8} m \omega^2 |u|^2 + \frac{\omega}{2} (L_z - \hbar) \right) \psi_n \\ &= \left(-\frac{2\hbar^2}{m} \left(-(n+1)\gamma + \gamma^2 |u|^2 \right) + \frac{1}{8} m \omega^2 |u|^2 - \frac{\omega}{2} (n+1)\hbar \right) \psi_n.\end{aligned}$$

For at ψ_n skal bli en egenfunksjon for H' , må vi eliminere de to leddene med $|u|^2$, og det gjør vi ved å velge

$$\gamma = \frac{m\omega}{4\hbar}.$$

Vi må velge $\gamma > 0$ for at ψ_n skal bli kvadratisk integrerbar. Det gir at

$$H' \psi_n = \left(\frac{2\hbar^2}{m} (n+1)\gamma - \frac{\omega}{2} (n+1)\hbar \right) \psi_n = 0.$$

Energien (dvs. egenverdien til H') er altså $E' = 0$. Vi har en Hamilton-operator som beskriver en harmonisk oscillator, med et tilleggsledd som er energien til spinnets magnetiske moment i magnetfeltet. Spinnenergien kansellerer nøyaktig nullpunktsenergien til den harmoniske oscillatoren, slik at den totale energien blir null.

Vi skal vise ortonormalitet i to dimensjoner (ikke i tre dimensjoner!)

Dvs., vi skal vise at

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \psi_k^* \psi_n = \mathcal{N}_k^* \mathcal{N}_n \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy (u^*)^k u^n e^{-2\gamma |u|^2} = \delta_{kn}.$$

Med polarkoordinater r, φ definert ved at $u = r e^{i\varphi}$, er

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy (u^*)^k u^n e^{-2\gamma |u|^2} &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} r dr r^{k+n} e^{i(n-k)\varphi} e^{-2\gamma r^2} \\ &= \delta_{kn} \pi \int_0^{\infty} d(r^2) (r^2)^n e^{-2\gamma r^2} = \delta_{kn} \frac{\pi n!}{(2\gamma)^{n+1}}.\end{aligned}$$

Det bekrefter at de oppgitte normeringskonstantene er korrekte,

$$\mathcal{N}_n = \sqrt{\frac{(2\gamma)^{n+1}}{\pi n!}} .$$

Vi har at

$$|\psi_n|^2 = \frac{(2\gamma)^{n+1}}{\pi n!} r^{2n} e^{-2\gamma r^2} .$$

Det er klart at $\psi_n \rightarrow 0$ når $r \rightarrow \infty$.

Det er like klart at $|\psi_0|^2 = (2\gamma/\pi) e^{-2\gamma r^2}$ er maksimal for $r = 0$.

For $n > 0$ gjelder at $\psi_n \rightarrow 0$ svært raskt, nemlig som r^{2n} , når $r \rightarrow 0$, og dessuten at $|\psi_n|^2$ er maksimal for en verdi av r der

$$0 = \frac{d}{d(r^2)} |\psi_n|^2 = |\mathcal{N}_n|^2 (nr^{2(n-1)} - 2\gamma r^{2n}) e^{-2\gamma r^2} ,$$

dvs. for

$$r = r_n = \sqrt{\frac{n}{2\gamma}} = \sqrt{\frac{2n\hbar}{m\omega}} .$$

Vi kan altså si med en viss rett at i tilstanden ψ_n er elektronet lokalisert i nærheten av periferien til en sirkel om origo med radius r_n .

2a) Vi har at

$$\begin{aligned} \psi_{mn} &= \frac{1}{\sqrt{2!}} \begin{vmatrix} \mathcal{N}_m u_1^m e^{-\gamma|u_1|^2} & \mathcal{N}_n u_1^n e^{-\gamma|u_1|^2} \\ \mathcal{N}_m u_2^m e^{-\gamma|u_2|^2} & \mathcal{N}_n u_2^n e^{-\gamma|u_2|^2} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2!}} \mathcal{N}_m \mathcal{N}_n (u_1^m u_2^n - u_1^n u_2^m) e^{-\gamma(|u_1|^2 + |u_2|^2)} . \end{aligned}$$

Og tilsvarende er

$$\psi_{kmn} = \frac{1}{\sqrt{3!}} \mathcal{N}_k \mathcal{N}_m \mathcal{N}_n \begin{vmatrix} u_1^k & u_1^m & u_1^n \\ u_2^k & u_2^m & u_2^n \\ u_3^k & u_3^m & u_3^n \end{vmatrix} e^{-\gamma(|u_1|^2 + |u_2|^2 + |u_3|^2)} .$$

Vi ser at ψ_{mn} er en sum av to produktbølgefunksjoner, og at ψ_{kmn} er en sum av $3! = 6$ produktbølgefunksjoner.

Vi har f.eks. at produktbølgefunksjonen $u_1^m u_2^n e^{-\gamma(|u_1|^2 + |u_2|^2)}$ er en egenfunksjon for $L_z = L_{1z} + L_{2z}$ med egenverdi $-(m+n)\hbar$, og en egenfunksjon for $H^0 = H_1^0 + H_2^0$ med egenverdi $0 + 0 = 0$.

Det samme gjelder for produktbølgefunksjonen $u_1^n u_2^m e^{-\gamma(|u_1|^2 + |u_2|^2)}$, og dermed også for ψ_{mn} .

På tilsvarende måte er ψ_{kmn} en egenfunksjon for $L_z = L_{1z} + L_{2z} + L_{3z}$ med egenverdi $-(k+m+n)\hbar$, og en egenfunksjon for $H^0 = H_1^0 + H_2^0 + H_3^0$ med egenverdi $0 + 0 + 0 = 0$.

2b) Vi har at

$$\psi_2^L = \mathcal{N}_2^L (u_1^3 - 3u_1^2 u_2 + 3u_1 u_2^2 - u_2^3) e^{-\gamma(|u_1|^2 + |u_2|^2)}$$

De Slater-determinantene som inngår her, er

$$\begin{aligned}\psi_{03} &= \frac{1}{\sqrt{2!}} \mathcal{N}_0 \mathcal{N}_3 (u_1^0 u_2^3 - u_1^3 u_2^0) e^{-\gamma(|u_1|^2 + |u_2|^2)}, \\ \psi_{12} &= \frac{1}{\sqrt{2!}} \mathcal{N}_1 \mathcal{N}_2 (u_1^1 u_2^2 - u_1^2 u_2^1) e^{-\gamma(|u_1|^2 + |u_2|^2)}.\end{aligned}$$

Og vi ser at

$$\begin{aligned}\psi_2^L &= \mathcal{N}_2^L \left(-\frac{\sqrt{2}}{\mathcal{N}_0 \mathcal{N}_3} \psi_{03} + \frac{3\sqrt{2}}{\mathcal{N}_1 \mathcal{N}_2} \psi_{12} \right) = \mathcal{N}_2^L \sqrt{\frac{2\pi^2}{(2\gamma)^5}} \left(-\sqrt{0!3!} \psi_{03} + 3\sqrt{1!2!} \psi_{12} \right) \\ &= \mathcal{N}_2^L \sqrt{\frac{12\pi^2}{(2\gamma)^5}} (-\psi_{03} + \sqrt{3} \psi_{12}) = \frac{1}{2} (-\psi_{03} + \sqrt{3} \psi_{12}).\end{aligned}$$

Det siste uttrykket er opplagt en normert bølgefunksjon, fordi ψ_{03} og ψ_{12} er ortonormale. Siden ψ_{03} og ψ_{12} begge er egenfunksjoner for $L_z = L_{1z} + L_{2z}$ og $H^0 = H_1^0 + H_2^0$ med egenverdier henholdsvis $-3\hbar$ og 0 , gjelder det samme for Laughlin-bølgefunksjonen ψ_2^L . På tilsvarende måte er ψ_3^L en egenfunksjon for $L_z = L_{1z} + L_{2z} + L_{3z}$ og for $H^0 = H_1^0 + H_2^0 + H_3^0$ med egenverdier henholdsvis $-9\hbar$ og 0 .

Hvordan kan vi generalisere til ψ_N^L ? Vel, egenverdien til $H^0 = H_1^0 + H_2^0 + \dots + H_N^0$ i tilstanden ψ_N^L kan ikke bli noe annet enn 0 .

Egenverdien til $L_z = L_{1z} + L_{2z} + \dots + L_{Nz}$ blir $-3N(N-1)\hbar/2$, det ser vi ved å telle potenser av alle faktorene $u_1, u_2, \dots, u_N$. Hver enkelt faktor $u_1, u_2, \dots, u_N$ gir et bidrag $-\hbar$ til den totale bandedreimpulsen L_z .

- 2c) Dersom $N = 2$, og de to elektronene er i tilstanden ψ_{mn} , så er sannsynligheten for å observere et elektron i en-elektrontilstanden ψ_j lik 1 for $j = m$ og for $j = n$, og lik 0 for alle andre verdier av j . Den totale sannsynligheten, summert over alle verdier av j , er lik 2 , fordi vi har to elektroner.

Formelt sett kan vi resonnerer slik. To-partikkeltilstanden er

$$\psi_{mn}(1, 2) = \alpha \psi_m(1) \psi_n(2) + \beta \psi_n(1) \psi_m(2),$$

der $\alpha = -\beta = 1/\sqrt{2}$. Denne antisymmetriserte bølgefunksjonen er en superposisjon av tilstandene $\psi_m(1)\psi_n(2)$ (med elektron 1 i tilstanden ψ_m og elektron 2 i tilstanden ψ_n) og $\psi_n(1)\psi_m(2)$ (med elektron 1 i tilstanden ψ_n og elektron 2 i tilstanden ψ_m). Sannsynligheten for å finne elektron 1 i tilstanden ψ_m er da $|\alpha|^2 = 1/2$, sannsynligheten for å finne elektron 2 i tilstanden ψ_m er $|\beta|^2 = 1/2$, og disse to mulighetene ekskluderer hverandre. Sannsynligheten for å finne enten elektron 1 eller elektron 2 i tilstanden ψ_m er følgelig $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Tilsvarende er sannsynligheten for å finne enten elektron 1 eller elektron 2 i tilstanden ψ_n lik $|\beta|^2 + |\alpha|^2 = 1$. Og alle andre tilstander enn ψ_m og ψ_n er uaktuelle.

Dersom vi har to elektroner i Laughlin-tilstanden

$$\psi_2^L = \frac{1}{2} (-\psi_{03} + \sqrt{3} \psi_{12}),$$

så er sannsynligheten $1/4$ for to-partikkeltilstanden ψ_{03} og $3/4$ for to-partikkeltilstanden ψ_{12} . Sannsynlighetene p_j for å finne et elektron i en-partikkeltilstandene ψ_j er da som følger:

$$p_0 = p_3 = \frac{1}{4}, \quad p_1 = p_2 = \frac{3}{4}, \quad p_4 = p_5 = \dots = 0.$$

Dersom vi har tre elektroner i tilstanden ψ_{kmn} , er $p_j = 1$ for $j = k, j = m$ og $j = n$, og $p_j = 0$ for alle andre verdier av j .

Dersom vi har tre elektroner i Laughlin-tilstanden

$$\psi_3^L = \frac{1}{\sqrt{31}} (-\psi_{036} + \sqrt{6} \psi_{045} + \sqrt{3} \psi_{126} - \sqrt{6} \psi_{135} + \sqrt{15} \psi_{234}) ,$$

så har vi følgende sannsynligheter: $p_{036} = 1/31$ for trepartikkeltilstanden ψ_{036} , $p_{045} = 6/31$ for trepartikkeltilstanden ψ_{045} , og så videre. Vi har da at:

$$\begin{aligned} p_0 &= p_{036} + p_{045} = \frac{7}{31} , & p_1 &= p_{126} + p_{135} = \frac{9}{31} , & p_2 &= p_{126} + p_{234} = \frac{18}{31} , \\ p_3 &= p_{036} + p_{135} + p_{234} = \frac{22}{31} , & p_4 &= p_{045} + p_{234} = \frac{21}{31} , & p_5 &= p_{045} + p_{135} = \frac{12}{31} , \\ p_6 &= p_{036} + p_{126} = \frac{4}{31} , & p_7 &= p_8 = \dots = 0 . \end{aligned}$$

Merk at $p_0 + p_1 + \dots + p_6 = 3$, som naturlig er når antallet elektroner er 3.

For Laughlin-bølgefunksjonen ψ_N^L med N stor vil det skje (formodentlig og grovt sett) at $p_j \approx 1/3$ for $j = 0, 1, 2, \dots, 3N$, mens $p_j = 0$ for $j > 3N$. Det vil (trolig) alltid være kanteffekter for $j \approx 3N$.

Vi ser at $N = 2$ og $N = 3$ ikke er særlig gode tilnærminger til $N = \infty$, i den forstand at når sannsynligheten for en en-partikkeltilstand ikke er null, er den som regel ikke nær $1/3$. Grunnen til at vi ikke kan regne 2 og 3 som asymptotiske verdier av N , er tydeligvis at N -partikkelsystemet har en kant som har en viss bredde (kanten er det overgangsområdet, dvs. de verdiene av j , der $p_j \rightarrow 0$).

Dersom sannsynligheten er $1/3$ for å finne et elektron i en-elektrontilstanden ψ_j , for alle $j = 0, 1, 2, \dots$, så er antallstettheten av elektroner konstant i hele planet:

$$\begin{aligned} n(x, y) &= \frac{1}{3} \sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j(x, y)|^2 = \frac{1}{3} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2\gamma)^{j+1}}{\pi j!} |u|^{2j} e^{-2\gamma|u|^2} = \frac{2\gamma}{3\pi} e^{2\gamma|u|^2} e^{-2\gamma|u|^2} \\ &= \frac{2\gamma}{3\pi} = \frac{m\omega}{6\pi\hbar} = \frac{eB}{3h} . \end{aligned}$$

- 2d) Den egenskapen ved bølgefunksjonene ψ_N^L som gjør at Coulomb-energien er liten i en slik tilstand, er at den gjennomsnittlige avstanden mellom elektronene er stor.

Forventningsverdien av Coulomb-energien er

$$E_C = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \int dx_i dy_i dx_j dy_j \frac{|\psi_N^L|^2}{4\pi\epsilon_0 |u_i - u_j|} .$$

Absoluttvadratet av bølgefunksjonen inneholder faktoren $|u_i - u_j|^6$, som sørger for at Coulomb-frastøtningen bidrar lite til energien.

- 3a) Betingelsen for at $\vec{A}(\vec{r})$ er en hermitesk operator, er at

$$(\vec{A}(\vec{r}))^\dagger = \vec{A}(\vec{r}) .$$

Når vi bruker Fourier-rekkeutviklingen, har vi at

$$(\vec{A}(\vec{r}))^\dagger = \sum_{\vec{k}} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} (\vec{A}_{\vec{k}})^\dagger = \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} (\vec{A}_{-\vec{k}})^\dagger .$$

Betingelsen på Fourier-komponentene er derfor at

$$(\vec{A}_{-\vec{k}})^\dagger = \vec{A}_{\vec{k}}.$$

Tilsvarende betingelser gjelder for $\vec{B}(\vec{r})$ og $\vec{E}(\vec{r})$.

Betingelsen for Fourier-komponentene av $\vec{A}(\vec{r})$ er lett å verifisere:

$$\begin{aligned} (\vec{A}_{-\vec{k}})^\dagger &= \left(\sum_{\lambda=1}^2 \vec{e}_{-\vec{k},\lambda} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 ck \mathcal{V}}} (a_{-\vec{k},\lambda} + a_{\vec{k},\lambda}^\dagger) \right)^\dagger \\ &= \sum_{\lambda=1}^2 \vec{e}_{-\vec{k},\lambda} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 ck \mathcal{V}}} (a_{-\vec{k},\lambda}^\dagger + a_{\vec{k},\lambda}) = \vec{A}_{\vec{k}}. \end{aligned}$$

Vi antar at polarisasjonsvektorene $\vec{e}_{\vec{k},\lambda}$ er reelle, og at $\vec{e}_{-\vec{k},\lambda} = \vec{e}_{\vec{k},\lambda}$.

At $\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r})$ er hermitesk, følger direkte av at $\vec{A}(\vec{r})$ er hermitesk, ettersom ∇ er reell.

Vi kan også verifisere betingelsen på Fourier-komponentene av $\vec{B}(\vec{r})$, at

$$(\vec{B}_{-\vec{k}})^\dagger = (-i\vec{k} \times \vec{A}_{-\vec{k}})^\dagger = i\vec{k} \times (\vec{A}_{-\vec{k}})^\dagger = i\vec{k} \times \vec{A}_{\vec{k}} = \vec{B}_{\vec{k}}.$$

Endelig verifiserer vi betingelsen på Fourier-komponentene av $\vec{E}(\vec{r})$:

$$\begin{aligned} (\vec{E}_{-\vec{k}})^\dagger &= \left(i \sum_{\lambda=1}^2 \vec{e}_{-\vec{k},\lambda} \sqrt{\frac{\hbar ck}{2\epsilon_0 \mathcal{V}}} (a_{-\vec{k},\lambda} - a_{\vec{k},\lambda}^\dagger) \right)^\dagger \\ &= -i \sum_{\lambda=1}^2 \vec{e}_{-\vec{k},\lambda} \sqrt{\frac{\hbar ck}{2\epsilon_0 \mathcal{V}}} (a_{-\vec{k},\lambda}^\dagger - a_{\vec{k},\lambda}) = \vec{E}_{\vec{k}}. \end{aligned}$$

3b) Vi har at

$$\begin{aligned} & \left[\vec{m} \cdot \vec{A}_{\vec{k}}, \vec{n} \cdot \vec{A}_{\vec{k}'} \right] \\ &= \left[\sum_{\lambda=1}^2 \vec{m} \cdot \vec{e}_{\vec{k},\lambda} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 ck \mathcal{V}}} (a_{\vec{k},\lambda} + a_{-\vec{k},\lambda}^\dagger), \sum_{\lambda'=1}^2 \vec{n} \cdot \vec{e}_{\vec{k}',\lambda'} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 ck' \mathcal{V}}} (a_{\vec{k}',\lambda'} + a_{-\vec{k}',\lambda'}^\dagger) \right] \\ &= \sum_{\lambda=1}^2 \sum_{\lambda'=1}^2 (\vec{m} \cdot \vec{e}_{\vec{k},\lambda}) (\vec{n} \cdot \vec{e}_{\vec{k}',\lambda'}) \frac{\hbar}{2\epsilon_0 c \sqrt{k k'} \mathcal{V}} [a_{\vec{k},\lambda} + a_{-\vec{k},\lambda}^\dagger, a_{\vec{k}',\lambda'} + a_{-\vec{k}',\lambda'}^\dagger] \\ &= 0, \end{aligned}$$

fordi

$$\begin{aligned} [a_{\vec{k},\lambda} + a_{-\vec{k},\lambda}^\dagger, a_{\vec{k}',\lambda'} + a_{-\vec{k}',\lambda'}^\dagger] &= [a_{\vec{k},\lambda}, a_{-\vec{k}',\lambda'}^\dagger] + [a_{-\vec{k},\lambda}^\dagger, a_{\vec{k}',\lambda'}] \\ &= \delta_{\vec{k},-\vec{k}'} \delta_{\lambda,\lambda'} - \delta_{-\vec{k},\vec{k}'} \delta_{\lambda,\lambda'} = 0. \end{aligned}$$

3c) Vi har at

$$\begin{aligned}
& \left[\vec{m} \cdot \vec{E}_{\vec{k}}, \vec{n} \cdot \vec{A}_{\vec{k}'} \right] \\
&= \left[i \sum_{\lambda=1}^2 \vec{m} \cdot \vec{e}_{\vec{k},\lambda} \sqrt{\frac{\hbar ck}{2\epsilon_0 \mathcal{V}}} (a_{\vec{k},\lambda} - a_{-\vec{k},\lambda}^\dagger), \sum_{\lambda'=1}^2 \vec{n} \cdot \vec{e}_{\vec{k}',\lambda'} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 ck' \mathcal{V}}} (a_{\vec{k}',\lambda'} + a_{-\vec{k}',\lambda'}^\dagger) \right] \\
&= i \sum_{\lambda=1}^2 \sum_{\lambda'=1}^2 (\vec{m} \cdot \vec{e}_{\vec{k},\lambda}) (\vec{n} \cdot \vec{e}_{\vec{k}',\lambda'}) \frac{\hbar \sqrt{k}}{2\epsilon_0 \sqrt{k'} \mathcal{V}} [a_{\vec{k},\lambda} - a_{-\vec{k},\lambda}^\dagger, a_{\vec{k}',\lambda'} + a_{-\vec{k}',\lambda'}^\dagger] \\
&= \delta_{\vec{k},-\vec{k}'} \frac{i\hbar}{\epsilon_0 \mathcal{V}} \sum_{\lambda=1}^2 (\vec{m} \cdot \vec{e}_{\vec{k},\lambda}) (\vec{n} \cdot \vec{e}_{-\vec{k},\lambda}),
\end{aligned}$$

fordi

$$[a_{\vec{k},\lambda} - a_{-\vec{k},\lambda}^\dagger, a_{\vec{k}',\lambda'} + a_{-\vec{k}',\lambda'}^\dagger] = [a_{\vec{k},\lambda}, a_{-\vec{k}',\lambda'}^\dagger] - [a_{-\vec{k},\lambda}^\dagger, a_{\vec{k}',\lambda'}] = 2\delta_{\vec{k},-\vec{k}'} \delta_{\lambda,\lambda'}.$$

Vi kan bearbejde resultatet vårt litt mer, ved å bruke at $\vec{e}_{-\vec{k},\lambda} = \vec{e}_{\vec{k},\lambda}$, og skrive f.eks.

$$\vec{n} = \vec{k} \frac{\vec{n} \cdot \vec{k}}{k^2} + \sum_{\lambda=1}^2 \vec{e}_{\vec{k},\lambda} (\vec{n} \cdot \vec{e}_{\vec{k},\lambda}),$$

idet vi bruker at $\vec{k}/k$, $\vec{e}_{\vec{k},1}$ og $\vec{e}_{\vec{k},2}$ er tre ortogonale enhetsvektorer. Det gir at

$$\sum_{\lambda=1}^2 (\vec{m} \cdot \vec{e}_{\vec{k},\lambda}) (\vec{n} \cdot \vec{e}_{-\vec{k},\lambda}) = \vec{m} \cdot \sum_{\lambda=1}^2 \vec{e}_{\vec{k},\lambda} (\vec{n} \cdot \vec{e}_{\vec{k},\lambda}) = \vec{m} \cdot \left(\vec{n} - \vec{k} \frac{\vec{n} \cdot \vec{k}}{k^2} \right) = \vec{m} \cdot \vec{n} - \frac{(\vec{m} \cdot \vec{k})(\vec{n} \cdot \vec{k})}{k^2}.$$

For å beregne kommutatoren $[\vec{m} \cdot \vec{E}_{\vec{k}}, \vec{n} \cdot \vec{B}_{\vec{k}'}]$ kan vi bruke at

$$\vec{n} \cdot \vec{B}_{\vec{k}'} = i \vec{n} \cdot (\vec{k}' \times \vec{A}_{\vec{k}'}) = i (\vec{n} \times \vec{k}') \cdot \vec{A}_{\vec{k}'}.$$

Av denne relasjonen følger at

$$\begin{aligned}
[\vec{m} \cdot \vec{E}_{\vec{k}}, \vec{n} \cdot \vec{B}_{\vec{k}'}] &= \delta_{\vec{k},-\vec{k}'} \frac{i\hbar}{\epsilon_0 \mathcal{V}} \sum_{\lambda=1}^2 (\vec{m} \cdot \vec{e}_{\vec{k},\lambda}) (i (\vec{n} \times (-\vec{k})) \cdot \vec{e}_{-\vec{k},\lambda}) \\
&= \delta_{\vec{k},-\vec{k}'} \frac{\hbar}{\epsilon_0 \mathcal{V}} \sum_{\lambda=1}^2 (\vec{m} \cdot \vec{e}_{\vec{k},\lambda}) ((\vec{n} \times \vec{k}) \cdot \vec{e}_{-\vec{k},\lambda}) \\
&= \delta_{\vec{k},-\vec{k}'} \frac{\hbar}{\epsilon_0 \mathcal{V}} \vec{m} \cdot (\vec{n} \times \vec{k}) \\
&= \delta_{\vec{k},-\vec{k}'} \frac{\hbar}{\epsilon_0 \mathcal{V}} (\vec{m} \times \vec{n}) \cdot \vec{k}.
\end{aligned}$$

Vi kan si uten videre at

$$[\vec{m} \cdot \vec{B}_{\vec{k}}, \vec{n} \cdot \vec{A}_{\vec{k}'}] = 0,$$

siden $\vec{B}_{\vec{k}} = i\vec{k} \times \vec{A}_{\vec{k}}$, og siden vi har vist ovenfor at alle Fourier-komponentene $\vec{A}_{\vec{k}}$ kommuterer innbyrdes.

Det er ikke mulig å kvantisere alle Fourier-komponentene av det elektriske feltet $\vec{E}(\vec{r})$ samtidig med alle Fourier-komponentene av den magnetiske flukstettheten $\vec{B}(\vec{r})$, ettersom de ikke alltid kommuterer med hverandre. Det er altså ikke mulig å lage et elektromagnetisk felt med eksakt spesifiserte verdier overalt av både det elektriske feltet og den magnetiske flukstettheten.