

Løysingsframlegg/skisse Eksamen TFY 4210 Kvanteteorien for mangepartikkelsystem 24. mai 2011

May 24, 2011

Oppgave 1

1) Ein global fasetransformasjon er på forma

$$\psi \rightarrow \psi e^{i\alpha} \quad \psi^\dagger \rightarrow \psi^\dagger e^{-i\alpha}, \quad (1)$$

der α er ein konstant. Invariansen følgjer ved innsetting: Sidan ψ og $\psi^\dagger$ opptrer i par og α er uavhengig av rom og tid vil fasene kansellere i alle ledd. Lagrange-funksjonen er i tillegg invariant under Lorentztransformasjonar.

2) Det elektriske feltet er

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla A^0 - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\ &= \underline{\underline{0}}, \end{aligned} \quad (2)$$

sidan $A^0 = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 0$. Vidare har vi

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

Dette gjev

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & Bx & 0 \end{vmatrix} \\ &= \underline{\underline{B\mathbf{k}}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Sidan Hamiltonfunksjonen inneheld eit ledd som avheng av x og $p_x = -i\frac{\partial}{\partial x}$, vil $[H, p_x] \neq 0$. Liknande argument gjev at $[H, p_y] = 0$.

3) Dirac-likninga er

$$(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi = 0. \quad (4)$$

Dersom vi bruker $\gamma^0 = \sigma_3$, $\gamma^1 = i\sigma_2$, and $\gamma^2 = -i\sigma_1$ og $A^\mu = (0, 0, Bx)$, får vi likning (3) i oppgavesettet. Ved innsetting av ψ kan vi skrive likningssettet

$$(E - m)f + \left[i\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} - iqBx \right] g(x) = 0, \quad (5)$$

$$\left[-i\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} - iqBx \right] f(x) - (E + m)g(x) = 0. \quad (6)$$

Vi løyser den andre likninga med omsyn på $g(x)$ og substituerer resultatet i den første likninga. Litt omstokking gjev då

$$\left[-\partial_x^2 + (qB)^2 \left(x - \frac{k}{qB} \right)^2 \right] f(x) = (E^2 - m^2 + qB)f(x). \quad (7)$$

Dette er likninga for ein harmonisk oscillator med sentrum i $x = k/qB$, dersom vi deler på $2m$ og identifiserer $\frac{1}{2}m\omega^2 \leftrightarrow (qB)^2/2m$ og $E \leftrightarrow (E^2 - m^2 + qB)/2m$. Sidan spekteret til oscillatoren er $E_n = \omega(1/2 + n)$, finn vi

$$\frac{E_n^2 - m^2 + qB}{2m} = \frac{qB}{m}(n + 1/2), \quad (8)$$

eller

$$\underline{\underline{E_n^2 = m^2 + 2qBn.}} \quad (9)$$

Oppgave 2

1) Nei, Lagrangetettheiten er *ikkje* Lorentzinvariant. Dei kovariant deriverte som inneheld μ bryt symmetrien mellom tid og rom. Vi har imidlertid rotasjon-sinvarians i rommet. Den fysiske forklaringa er at $\mu \neq 0$ tyder at vi har materie tilstades og kvilesystemet til materien er spesielt (føretrekt) inertialsystem.

2) Verknaden S er gjeve ved

$$S = \int d^4x \mathcal{L}. \quad (10)$$

Den klassiske verknaden får ein ved å ignorere alle kvantefelt. For konstant ϕ_0 gjev dette

$$S = \int d^4x \left[-\frac{1}{2}(m^2 - \mu^2)\phi_0^2 - \frac{\lambda}{24}\phi_0^4 \right]. \quad (11)$$

Sidan $S = \int d^4x [-V_0]$ får vi

$$V_0 = \underline{\underline{\frac{1}{2}(m^2 - \mu^2)\phi_0^2 + \frac{\lambda}{24}\phi_0^4.}} \quad (12)$$

3) Minimumspunkta for V_0 finnast ved å løyse likninga

$$\begin{aligned}\frac{dV_0}{d\phi_0} &= \phi_0(m^2 - \mu^2) + \frac{\lambda}{6}\phi_0^3 \\ &= 0 .\end{aligned}\quad (13)$$

Dette gjev

$$\phi_0 = 0 , \quad \phi_0 = \sqrt{\frac{6(\mu^2 - m^2)}{\lambda}} . \quad (14)$$

Dersom $\mu^2 < m^2$ finst det berre det trivielle ekstremalpunktet $\phi_0 = 0$. Dersom $\mu^2 > m^2$ er $\phi_0 = 0$ eit lokalt maksimum og $\phi_0 = \sqrt{\frac{6(\mu^2 - m^2)}{\lambda}}$ er eit lokalt minimum. Dette tilsvarer eit potensial som ein meksikansk hatt.

4) Dispersjonsrelasjonen er gjeve ved nullpunkta til determinanten til matrisa gjeve i oppgåva. I impulsrommet er dette

$$D = \begin{pmatrix} -p^2 + M_1^2 & -2i\mu p_0 \\ 2i\mu p_0 & -p^2 + M_2^2 \end{pmatrix} . \quad (15)$$

Dispersjonsrelasjonen finn ein ved å rekne ut $\det D = 0$. Vi må skilje mellom $\phi = 0$ og $\phi_0 \neq 0$.

I det første tilfellet gjev $\det D = 0$

$$(p^2 - M_1^2)^2 - 4\mu^2 p_0^2 = 0 , \quad (16)$$

der vi har $M_1^2 = M_2^2 = m^2 - \mu^2$. Vi får da

$$p_0^4 - 2p_0^2(\mathbf{p}^2 + m^2 + \mu^2) - (\mathbf{p}^2 + M_1^2)^2 = 0 \quad (17)$$

eller

$$\begin{aligned}p_0^2 &= \mathbf{p}^2 + m^2 + \mu^2 \pm 2\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \\ &= \left(\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \pm \mu \right)^2 .\end{aligned}\quad (18)$$

Dei positive løysingane er da

$$p_0 = \underline{\underline{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \pm \mu}} . \quad (19)$$

Dette er dispersjonsrelasjonane vi har utleia på førelesningane og gjeld for $m^2 > \mu^2$.

For tilfellet $\phi_0 \neq 0$, det vil seie for $\mu^2 > m^2$ gjev $\det D = 0$

$$p^2(p^2 - M_1^2) - 4\mu^2 p_0^2 = 0 , \quad (20)$$

der vi har nytta at $M_2^2 = 0$ i det klassiske minimumet. Dette gjev

$$p_0^4 - p_0^2(4\mu^2 + 2\mathbf{p}^2 + M_1^2) + \mathbf{p}^2(\mathbf{p}^2 + M_1^2) = 0 . \quad (21)$$

Denne likninga løyser vi med omsyn på p_0^2 og nyttar at $M_1^2 = 2(\mu^2 - m^2)$ i klassisk minimum. Dette gjev

$$\begin{aligned}p_0^2 &= \mathbf{p}^2 + 3\mu^2 - m^2 \pm \sqrt{(3\mu^2 - m^2)^2 + 4\mu^2 \mathbf{p}^2} \\ &= \underline{\underline{\mathbf{p}^2 + 3\mu^2 - m^2 \pm (3\mu^2 - m^2) \sqrt{1 + \frac{4\mu^2 \mathbf{p}^2}{(3\mu^2 - m^2)^2}}}} .\end{aligned}\quad (22)$$

For små $\mathbf{p}^2$ kan vi rekkeutvikle og får

$$p_0^2 \approx \underline{\underline{p^2 + 6\mu^2 - 2m^2}}, \quad p_0^2 \approx \underline{\underline{\frac{\mu^2 - m^2}{3\mu^2 - m^2} \mathbf{p}^2}}. \quad (23)$$

Den andre dispersjonsrelasjonen er lineær for små $|\mathbf{p}|$:

$$p_0 = \underline{\underline{\sqrt{\frac{\mu^2 - m^2}{3\mu^2 - m^2}} |\mathbf{p}|}}. \quad (24)$$

Vi har såleis eit Goldstone boson for $\mu^2 > m^2$. Dette er i samsvar med Goldstones teorem sidan rotasjonssymmetrien blir broten av $\phi_0 \neq 0$. Massen til den andre moden er $2\mu^2 + 2M_1^2 > 0$.

Oppgave 3

1) Det første leddet er det klassiske bidraget til den frie energien og det andre leddet er første kvantekorleksjon ("one-loop correction"). Den frie energien kan skrivast

$$\mathcal{F} = -\frac{\mu^2}{2g} + \frac{1}{4m} \int \frac{d^2p}{(\pi)^2} p \sqrt{p^2 + y^2}, \quad (25)$$

der $y = 4m\mu$. Vi bruker formelen gjeve i oppgåvesettet og få

$$\mathcal{F} = -\frac{\mu^2}{2g} - \frac{m\mu^2}{8\pi} \left[\frac{1}{\epsilon} + \ln \frac{\Lambda^2}{\mu} + C \right]. \quad (26)$$

Dersom vi i det første leddet substituerer $g \rightarrow g + \delta$ og rekkeutviklar til første orden i δg får vi

$$\mathcal{F} = -\frac{\mu^2}{2g} + \frac{\mu^2}{2g^2} \delta g - \frac{m\mu^2}{8\pi} \left[\frac{1}{\epsilon} + \ln \frac{\Lambda^2}{\mu} + C \right]. \quad (27)$$

For å kansellere polen i ϵ , må ein velje $\delta g = mg^2/4\pi\epsilon$. Den renormaliserte frie energien blir då

$$\mathcal{F} = \underline{\underline{-\frac{\mu^2}{2g} - \frac{m\mu^2}{8\pi} \left[\ln \frac{\Lambda^2}{\mu} + C \right]}}. \quad (28)$$

2) Frå formelsamlinga har vi

$$\begin{aligned} \rho &= -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mu} \\ &= \underline{\underline{\frac{\mu}{g} \left[1 + \frac{mg}{4\pi} \left(\ln \frac{\Lambda^2}{\mu} + K \right) \right]}}, \end{aligned} \quad (29)$$

der $K = C - \frac{1}{2}$. Vi inverterer likninga over til første orden i g . Dette gjev

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{g\rho}{1 + \frac{mg}{4\pi} \left(\ln \frac{\Lambda^2}{g\rho} + K \right)} \\ &\approx g\rho \left[1 - \frac{mg}{4\pi} \left(\ln \frac{\Lambda^2}{g\rho} + K \right) \right],\end{aligned}\tag{30}$$

der vi i korreksjonsleddet har brukt resultatet $\mu = g\rho$ som er korrekt til leiande orden. Innsetting i uttrykket $\mathcal{E} = \mathcal{F} + \mu\rho$, gjev då

$$\mathcal{E} = \underline{\underline{\frac{1}{2}g\rho^2 \left[1 - \frac{gm}{4\pi} \left(\ln \frac{\Lambda^2}{g\rho} + C \right) \right]}},\tag{31}$$

der vi har eliminert μ til fordel for $g\rho$ sidan $\mathcal{E}$ er ein funksjon av ρ .

3) Loopintegral som er divergente er kutta av med ein ultraviolet cutoff Λ . Det tyder at vi ignorerer bidrag til integrala som impuls større enn Λ . Dimensjonell regularisering er ein gaugeinvariant regulator. Logaritmiske divergensar dukkar opp som polar i ϵ medan potensdivergensar automatisk er eliminert.