

## TFY4215 Innføring i kvantefysikk Eksamen 17. august 2022

### 1 – 8: OPPVARMING

Oppgave 1 – 5: Et fritt elektron med masse  $m_e$  i det konstante potensialet  $V = 0$  befinner seg i den stasjonære tilstanden  $\Psi(x, t) = \exp(ikx - i\omega t)$  med  $k = 1.00 \text{ nm}^{-1}$ .

#### 1) Hva er partikkelens impuls?

- A)  $1.05 \cdot 10^{-34} \text{ kg m/s}$     B)  $1.05 \cdot 10^{-31} \text{ kg m/s}$     C)  $1.05 \cdot 10^{-28} \text{ kg m/s}$   
D)  $1.05 \cdot 10^{-25} \text{ kg m/s}$     E)  $1.05 \cdot 10^{-22} \text{ kg m/s}$     F)  $1.05 \cdot 10^{-19} \text{ kg m/s}$

#### 2) Hva er partikkelens kinetiske energi?

- A) 28 meV    B) 38 meV    C) 48 meV    D) 58 meV    E) 68 meV    F) 78 meV

#### 3) Hva er verdien av størrelsen $\omega$ ?

- A)  $18 \text{ ps}^{-1}$     B)  $28 \text{ ps}^{-1}$     C)  $38 \text{ ps}^{-1}$     D)  $48 \text{ ps}^{-1}$     E)  $58 \text{ ps}^{-1}$     F)  $68 \text{ ps}^{-1}$

#### 4) Hva er elektronets hastighet?

- A) 615 km/s    B) 515 km/s    C) 415 km/s    D) 315 km/s    E) 215 km/s    F) 115 km/s

#### 5) Hva er sannsynlighetsstrømmen $j$ i denne tilstanden?

- A) 615 km/s    B) 515 km/s    C) 415 km/s    D) 315 km/s    E) 215 km/s    F) 115 km/s

#### 6) Hva er termisk de Broglie – bølgelengde til $\text{CO}_2$ –molekyler ved 300 K?

( $m_C = 12u$ ,  $m_O = 16u$ )

- A) 66 pm    B) 55 pm    C) 44 pm    D) 33 pm    E) 22 pm    F) 11 pm

#### 7) Hva er rms-hastigheten til $\text{CO}_2$ –molekyler ved 300 K?

- A) 634 m/s    B) 523 m/s    C) 412 m/s    D) 301 m/s    E) 290 m/s    F) 189 m/s

#### 8) Hva er midlere rotasjonsenergi pr $\text{CO}_2$ –molekyl ved 300 K? (Molekylet er lineært.)

- A) 11 meV    B) 26 meV    C) 41 meV    D) 56 meV    E) 71 meV    F) 86 meV

## 9 – 16: 1D BOKS OG HARMONISK OSCILLATOR

Oppgave 9 – 12: Et elektron med masse  $m_e$  befinner seg i bokspotensialet  $V(x) = 0$  for  $0 < x < L$ ,  $V(x) = \infty$  ellers. Boksbredden er  $L = 40 \text{ \AA}$ .

**9)** Elektronet emitterer et foton og gjennomgår en overgang fra 3. til 2. eksiterte tilstand, dvs fra  $\psi_4$  til  $\psi_3$ . **Hva er fotonets bølgelengde?**

- A)  $1.6 \text{ }\mu\text{m}$       B)  $3.6 \text{ }\mu\text{m}$       C)  $5.6 \text{ }\mu\text{m}$       D)  $7.6 \text{ }\mu\text{m}$       E)  $9.6 \text{ }\mu\text{m}$       F)  $11.6 \text{ }\mu\text{m}$

**10)** Anta at partikkelen befinner seg i den normerte men ikke-stasjonære tilstanden

$$\Psi(x, t) = \sum_{n=3,4} c_n \psi_n(x) \exp(-iE_n t/\hbar),$$

med  $c_3 = c_4 = 1/\sqrt{2}$ . Sannsynlighetstettheten  $\rho(x, t) = |\Psi(x, t)|^2$  vil da variere harmonisk med tiden. **Med hvilken periode  $T$  oscillerer  $\rho(x, t)$ ?**

- A) 15 fs      B) 25 fs      C) 35 fs      D) 45 fs      E) 55 fs      F) 65 fs

**11)** Anta at partikkelen er preparert i en normert starttilstand  $\Psi(x, 0) = \sqrt{2/L} \cos(\pi x/L)$ . **Hva er da sannsynligheten for at en måling av partikkelens energi gir resultatet  $E_3$ ?**

- A) Null      B) 0.12      C) 0.22      D) 0.32      E) 0.42      F) 0.52

**12)** Anta at partikkelen er preparert i en normert starttilstand  $\Psi(x, 0) = \sqrt{2/L} \cos(\pi x/L)$ . **Hva er da sannsynligheten for at en måling av partikkelens energi gir resultatet  $E_4$ ?**

- A) Null      B) 0.12      C) 0.22      D) 0.32      E) 0.42      F) 0.52

Oppgitt:

$$\int_0^\pi \cos(z) \sin(2Nz) dz = 4N/(4N^2 - 1)$$

Oppgave 13 – 16: Vibrasjonsfrihetsgraden i molekylet  $\text{Cl}_2$  kan, for relativt små utsving  $x$  fra likevekt, beskrives av potensialet  $V(x) = m\omega^2 x^2/2$ , med  $m \simeq 17.5u$ . Molekylet har bindingslengde  $2.18 \text{ \AA}$ . Vibrasjonsenergien er da kvantisert, med energiene  $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$  og med  $\hbar\omega = 69 \text{ meV}$ .

**13) Hva er det klassisk tillatte området for  $x$  i grunntilstanden? ( $n = 0$ )?**

- A)  $|x| < 3.9 \text{ pm}$       B)  $|x| < 4.9 \text{ pm}$       C)  $|x| < 5.9 \text{ pm}$   
 D)  $|x| < 6.9 \text{ pm}$       E)  $|x| < 7.9 \text{ pm}$       F)  $|x| < 8.9 \text{ pm}$

**14) Ved romtemperatur  $300 \text{ K}$  er konsentrasjonen av molekyler i grunntilstanden  $n_0$  og konsentrasjonen av molekyler i 1. eksiterte tilstand  $n_1$ . **Hva er forholdet  $n_1/n_0$ ?****

- A) 0.04      B) 0.05      C) 0.06      D) 0.07      E) 0.08      F) 0.09

Oppgitt:

$$n_j \sim \exp(-E_j/k_B T)$$

**15) Anta at partikkelen befinner seg i (den normerte men ikke-stasjonære) tilstanden**

$$\Psi(x, t) = \sum_{n=0}^3 c_n \psi_n(x) \exp(-iE_n t/\hbar),$$

med  $c_0 = \sqrt{4/10}$ ,  $c_1 = \sqrt{3/10}$ ,  $c_2 = \sqrt{2/10}$  og  $c_3 = \sqrt{1/10}$ .

**Hva er forventningsverdien  $\langle E \rangle$  av molekylets vibrasjonsenergi?**

- A) 144 meV      B) 134 meV      C) 124 meV      D) 114 meV      E) 104 meV      F) 94 meV

**16) En bedre beskrivelse av potensialet gir Morse-potensialet**

$$V_M(x) = V_0(1 - \exp(-\alpha x))^2.$$

**For små utsving  $x$  fra likevekt, hva er molekylets fjærkonstant  $k$  uttrykt ved parametrene i Morse-potensialet?**

- A)  $k = 3V_0\alpha$       B)  $k = V_0/2\alpha$       C)  $k = \alpha/V_0^2$       D)  $k = \alpha^2/2$       E)  $k = V_0\alpha$       F)  $k = 2V_0\alpha^2$

## 17 – 24: STYKKEVIS KONSTANTE POTENSIALER I 1 DIMENSJON

Oppgave 17 – 18: Diskretisering av TUSL, med enkleste tilnærming for  $d^2\psi/dx^2$ , gir differanseligningene

$$-\frac{\hbar^2}{2ma^2}(\psi_{n+1} - 2\psi_n + \psi_{n-1}) + V_n\psi_n = E\psi_n.$$

Her er  $a = x_{n+1} - x_n$  avstanden mellom ”gitterpunktene” og  $m$  er partikkelens masse. For en fri partikkel, med  $V_n = 0$  for alle  $n$ , er bølgefunksjonen  $\psi(x_n) = \psi_n = \exp(ikx_n) = \exp(ikna)$ , med bølgetall  $k$  og energi (dispersjonsrelasjon)  $E(k)$ .

**17) Hvordan ser dispersjonsrelasjonen ut dersom partikkelens bølgelengde  $\lambda \gg a$ , dvs i nærheten av  $k = 0$ ?**

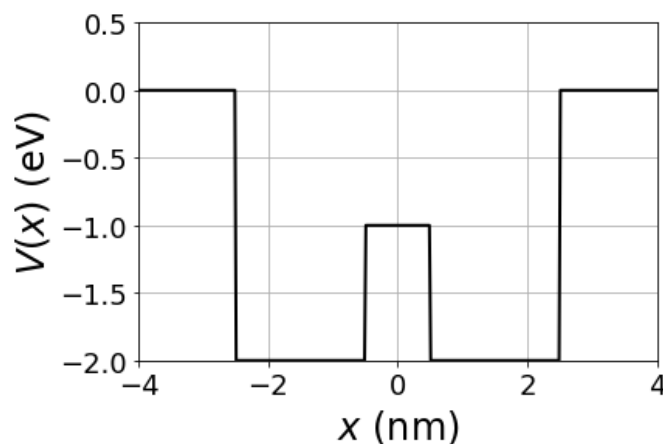
- A)  $E(k) = \hbar^2 \sin(ka)/ma^2$       B)  $E(k) = \hbar^2 \cos(ka)/ma^2$       C)  $E(k) = \hbar^2 k^2/2m$   
D)  $E(k) = \hbar^2 k^2/m$       E)  $E(k) = 2\hbar^2 k^2/m$       F)  $E(k) = \hbar^2 \tan(ka)/ma^2$

**18) Den romlige diskretiseringen (av  $x$ -aksen) resulterer i ett *energibånd* med tillatte verdier for  $E$ . Hva er båndbredden ( $E_{\max} - E_{\min}$ ) dersom partikkelen er et elektron og  $a = 3.00 \text{ \AA}$ ?**

- A) 1.18 eV      B) 1.68 eV      C) 2.18 eV      D) 2.68 eV      E) 3.18 eV      F) 3.68 eV

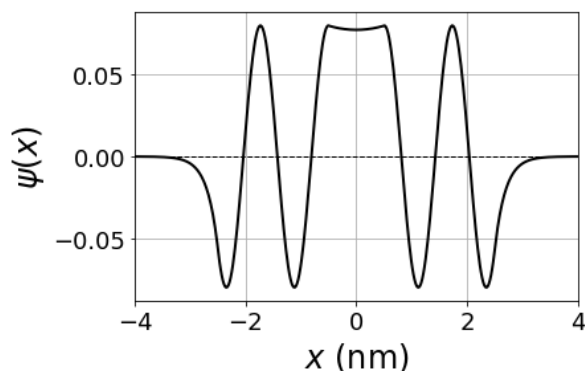
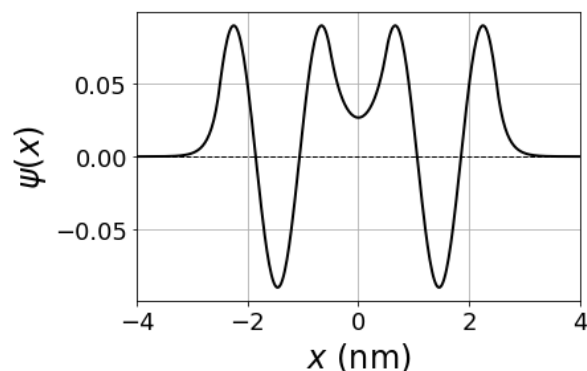
Oppgitt:  $\cos x \simeq 1 - x^2/2$  når  $|x| \ll 1$ .

Oppgave 19 – 22: Med tre ulike halvledere har du fabrikkert en lagdelt struktur som resulterer i et stykkevis konstant potensial  $V(x)$  som er symmetrisk om  $x = 0$ :



Den ”lille” barrieren i midten har bredde 1.0 nm og potensialverdi  $-1.0 \text{ eV}$ . Området med  $V = -2.0 \text{ eV}$  på hver side har bredde 2.0 nm. Du kan anta at områdene der  $V = 0$  fortsetter mot  $|x| \rightarrow \infty$ .

Figuren nedenfor viser to bølgefunksjoner for et elektron med masse  $m_e$  i dette potensialet. La oss nummerere bølgefunksjonene  $\psi_0, \psi_1, \psi_2$  osv, fra grunntilstanden  $\psi_0$  og oppover, med økende energi.



19) Hvilken tilstand er vist i figuren til venstre?

- A)  $\psi_2$     B)  $\psi_3$     C)  $\psi_4$     D)  $\psi_5$     E)  $\psi_6$     F)  $\psi_7$

20) Hvilken tilstand er vist i figuren til høyre?

- A)  $\psi_2$     B)  $\psi_3$     C)  $\psi_4$     D)  $\psi_5$     E)  $\psi_6$     F)  $\psi_7$

Nullpunktene til tilstanden i figuren til venstre har ca  $x$ -verdiene  $\pm 1.86$  og  $\pm 1.06$  nm.

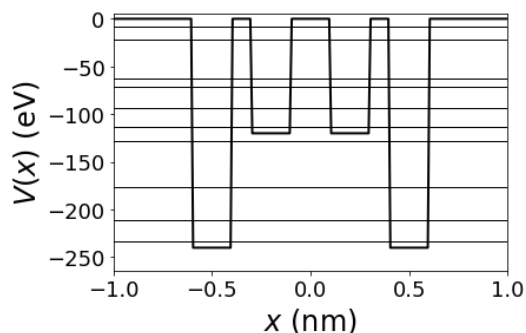
21) Hva er da omtrentlig energieigenverdien for tilstanden i figuren til venstre?

- A)  $-1.7$  eV    B)  $-1.4$  eV    C)  $-1.1$  eV    D)  $-0.8$  eV    E)  $-0.5$  eV    F)  $-0.2$  eV

22) Med utgangspunkt i figuren til høyre, hva kan du si om energieigenverdien for denne tilstanden?

- A) Like i underkant av  $0.0$  eV  
 B) Like i overkant av  $0.0$  eV  
 C) Like i overkant av  $-2.0$  eV  
 D) Like i overkant av  $-1.0$  eV  
 E) Like i underkant av  $-1.0$  eV  
 F) Praktisk talt lik  $-1.5$  eV

Oppgave 23 – 24: Potensialet  $V(x)$  i figuren nedenfor er en endimensjonal karikatur av potensialet som elektronene opplever i det lineære molekylet  $C_2F_2$ :



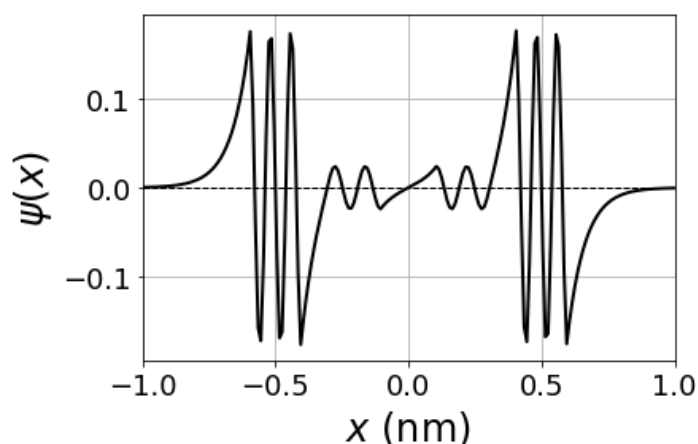
I denne kvalitative modellen har molekylet 20 romlige bundne tilstander med omtrentlige energieigenverdier som følger:

$E_0 \simeq E_1 \simeq -233$  eV,  $E_2 \simeq E_3 \simeq -211$  eV,  $E_4 \simeq E_5 \simeq -176$  eV,  $E_6 \simeq E_7 \simeq -129$  eV,  $E_8 \simeq E_9 \simeq -113$  eV,  $E_{10} \simeq E_{11} \simeq -94$  eV,  $E_{12} \simeq E_{13} \simeq -71$  eV,  $E_{14} \simeq E_{15} \simeq -62$  eV,  $E_{16} \simeq E_{17} \simeq -22$  eV,  $E_{18} \simeq E_{19} \simeq -8.5$  eV. Disse egenverdiene er angitt med horisontale linjer i figuren for potensialet ovenfor. Karbon og fluor har atomnummer hhv 6 og 9. Her antar vi at molekylets elektroner ikke vekselvirker med hverandre, men siden de er fermioner med spinn  $1/2$ , adlyder de Pauliprinsippet.

**23) Hvor mange romlige bundne tilstander er okkupert av elektroner i molekylets grunn-tilstand?**

- A) 10      B) 11      C) 12      D) 13      E) 14      F) 15

**24) Figuren nedenfor viser en av molekylets bundne tilstander:**



**Hva er tilhørende energieigenverdi?**

- A)  $-8.5$  eV      B)  $-22$  eV      C)  $-62$  eV      D)  $-71$  eV      E)  $-94$  eV      F)  $-113$  eV

## 25 – 32: KVANTEMEKANIKK I 2 OG 3 DIMENSJONER

Oppgave 25 – 27: Vi ser her på 2s-tilstanden i hydrogenatomet,  $\psi_{200} = R_{20}(r) Y_{00}(\theta, \phi)$ , med radial-funksjon

$$R_{20}(r) = \frac{1}{\sqrt{2}a_0^{3/2}} \left(1 - \frac{r}{2a_0}\right) e^{-r/2a_0}$$

og med vinkelfunksjon som i formelvedlegget. ( $a_0$  er Bohrradien.)

**25) Hvor har  $|R_{20}|^2$  sin maksimale verdi?**

- A)  $r = 0$       B)  $r = 0.382a_0$       C)  $r = 0.764a_0$       D)  $r = 2a_0$       E)  $r = 2.618a_0$       F)  $r = 6a_0$

**26) Hvor har radialtettheten  $|rR_{20}|^2$  sin maksimale verdi?**

- A)  $r = 0$       B)  $r = 0.382a_0$       C)  $r = 0.764a_0$       D)  $r = 2a_0$       E)  $r = 2.618a_0$       F)  $r = 6a_0$

**27) Hva er  $\langle r \rangle$  i denne tilstanden?**

- A)  $r = 0$       B)  $r = 0.382a_0$       C)  $r = 0.764a_0$       D)  $r = 2a_0$       E)  $r = 2.618a_0$       F)  $r = 6a_0$

Oppgitt:

$$dP/dr = (rR)^2$$
$$\int_0^\infty x^3(1 - x/2)^2 e^{-x} dx = 12$$

Oppgave 28 – 30: En partikkel med masse  $m$  befinner seg i et todimensjonalt isotropt harmonisk potensial  $V(r) = m\omega^2 r^2/2$ ,  $r^2 = x^2 + y^2$ . Energiegentilstandene er på produktform,

$$(n_x n_y) \equiv \psi_{n_x}(x) \cdot \psi_{n_y}(y) \quad (n_x, n_y = 0, 1, 2 \dots).$$

**28) Hva er (romlig) degenerasjonsgrad for energinivået  $5\hbar\omega$ ?**

- A) 2      B) 3      C) 4      D) 5      E) 6      F) 7

**29) Hva er mulige måleresultater for  $L_z$  i tilstanden (01)?**

- A)  $\hbar$       B)  $-\hbar$       C)  $2\hbar$       D)  $-2\hbar$       E)  $\pm\hbar$       F)  $\pm 2\hbar$

**30) Hva er mulige måleresultater for  $L_z$  i tilstanden (11)?**

- A)  $\hbar$       B)  $-\hbar$       C)  $2\hbar$       D)  $-2\hbar$       E)  $\pm\hbar$       F)  $\pm 2\hbar$

Oppgave 31 – 32: Ikke-vekselvirkende elektroner (fermioner, spinn 1/2, masse  $m_e$ ) befinner seg i en kubisk tredimensjonal potensialboks avgrenset av  $0 < x < L = 10 \text{ nm}$ ,  $0 < y < L$  og  $0 < z < L$ . I denne boksen er potensialet  $V = 0$ , utenfor er  $V = \infty$ . Partikkeltettheten i denne tredimensjonale elektrongassen er  $10^{21} \text{ pr cm}^3$ . Vi antar at temperaturen er lav, slik at systemet er i sin grunntilstand.

**31) Hva er energien til de langsomste elektronene?**

- A) 7 meV      B) 9 meV      C) 11 meV      D) 13 meV      E) 15 meV      F) 17 meV

**32) Hva er energien til de raskeste elektronene?**

- A) 0.36 eV      B) 1.36 eV      C) 2.36 eV      D) 3.36 eV      E) 4.36 eV      F) 5.36 eV



### 33 – 40: SPINN

**33)** Hydrogenatomer i grunntilstanden (1s) befinner seg i et ytre magnetfelt  $\mathbf{B} = B\hat{z}$ . Elektronet i hvert atom har et spinn  $\mathbf{S}$  og et tilhørende magnetisk dipolmoment  $\boldsymbol{\mu} = (-e/m_e)\mathbf{S}$ . Hvis den magnetiske feltstyrken er 6.0 T, **hva er energiforskjellen mellom atomer med elektronspinn opp og ned**, dvs med spinntilstand henholdsvis  $\chi_+$  og  $\chi_-$ ?

- A) 0.21 meV    B) 0.33 meV    C) 0.45 meV    D) 0.57 meV    E) 0.69 meV    F) 0.81 meV

Opgitt: Potensiell energi for magnetisk dipol i magnetfelt:  $V = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$ .

**34)** I forrige oppgave, hvor stor er vinkelen mellom elektronets spinn  $\mathbf{S}$  og  $xy$ -planet?

- A) 25.3°    B) 35.3°    C) 45.3°    D) 55.3°    E) 65.3°    F) 75.3°

**35)** Et elektron befinner seg i spinntilstanden

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

**Hva er  $S_x$  for dette elektronet?**

- A) Uskarp    B) Null    C)  $\hbar/2$     D)  $-\hbar/2$     E)  $\hbar$     F)  $-\hbar$

**36)** Et elektron befinner seg i spinntilstanden

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

**Hva er  $S_z$  for dette elektronet?**

- A) Uskarp    B) Null    C)  $\hbar/2$     D)  $-\hbar/2$     E)  $\hbar$     F)  $-\hbar$

**37)** Hva er  $\langle S_z \rangle$  for et elektron i spinntilstanden

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{18}} \begin{pmatrix} 2i+3 \\ 2i-1 \end{pmatrix}?$$

- A)  $\hbar/18$     B)  $\hbar/9$     C)  $2\hbar/9$     D)  $-2\hbar/9$     E)  $-\hbar/9$     F)  $-\hbar/18$

38) Hva er  $\langle S_z^2 \rangle$  for et elektron i spinntilstanden

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{18}} \begin{pmatrix} 2i + 3 \\ 2i - 1 \end{pmatrix}?$$

- A)  $\hbar^2/2$     B)  $\hbar^2/3$     C)  $\hbar^2/4$     D)  $\hbar^2/5$     E)  $\hbar^2/6$     F)  $\hbar^2/8$

39) Hva er  $\Delta S_y$  for et elektron i spinntilstanden

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}?$$

- A)  $\hbar/5$     B)  $\hbar/4$     C)  $\hbar/3$     D)  $\hbar/2$     E)  $\hbar/6$     F)  $\hbar/7$

40)



Hva var – ifølge historien – nøkkelen til at de to stripene med avbøyde sølvatomer i det hele tatt ble observert i Stern–Gerlach–eksperimentet?

- A) Et melkespann  
B) Et krus  
C) En melkekopp  
D) Et kremmerhus  
E) Et lokk  
F) Billige sigarer med høyt svovelinhold