

EKSAMEN I FAG 715 15

STATISTISK MEKANIKK

(ved Lærerhøgskolen Statistisk mekanikk F 113)

Måndag 21. januar 1985

kl. 0900 - 1500

Tillatte hjelpemiddel: Kalkulator

K. Rottmann: Matematische Formelsammlung

Fagleg kontakt: K. Budal, tlf. 3455

Oppgave 1

Sannsynlighetsfordelinga for eit kanonisk ensemble av identiske klassiske partiklar er

$$\rho(q,p) = \frac{1}{N! h^{3N}} \exp \left(\frac{F - H(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N)}{kT} \right)$$

- a) Identifiser alle storleikane som inngår i uttrykket for ρ .
- b) Finn eit uttrykk for partisjonsfunksjonen $Z = \exp(-F/kT)$ på integralform.
- c) Vis at når N er stor, kan F for ein ideell, einatomig gass, skrivast:

$$F = -NkT \ln \left[\frac{V}{N} \left(\frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{3/2} e \right],$$

der m er partikkelmassen.

d) Vis at den indre energien U kan skrivast:

$$U = kT^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln Z$$

Finn U og C_V for ein ideell, einatomig gass.

e) Vis at trykket p kan skrivast:

$$p = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_T .$$

Bruk dette uttrykket til å finna tilstandslikninga for ein ideell, einatomig gass.

f) Finn entropien S , uttrykt ved ein partiellderivert av F .
Finn S for ein ideell, einatomig gass.

Oppgitt:

$$1) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\pi/\alpha}$$

2) Stirlings formel

$$N! \approx N^N e^{-N} \sqrt{2\pi N} \left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right) \right)$$

$$3) F = U - TS$$

$$4) Tds = dU + pdV$$

Oppgave 2

- a) Skisser kvalitativt korleis varmekapasiteten C_V til ein gass av diatomiske molekyll varierer med temperaturen. Gjer kort greie for dei ulike bidraga til C_V .

Kvifor observerer ein bidrag til C_V berre frå to rotasjonsretningar? Kvifor ikkje frå alle tre retningane?

- b) Tre ulike gassar av diatomiske XY - molekyll har følgjande molekyllære samansetningar:

i) $X = Y = {}^{12}_6\text{C}$, kjernespin: $S_X = S_Y = 0$

ii) $X = {}^{12}_6\text{C}$, $Y = {}^{13}_6\text{C}$, kjernespin: $S_X = 0$, $S_Y = \frac{1}{2}$

iii) $X = Y = {}^{13}_6\text{C}$, kjernespin: $S_X = S_Y = \frac{1}{2}$

Kva slag spektroskopiske hovudskilnader er det på gassane?

Oppgitt:

$$E_\ell = \frac{\hbar^2}{2I} \ell(\ell+1)$$

Oppgave 3

I eit eindimensjonalt elektronsystem av ikkje-vekselverkande partiklar, er antal einpartikkelnivå per energieining lik $(1/h) \sqrt{2m/\epsilon}$, der l er lengda av systemet, h er Plancks konstant, m er elektronmassen, og ϵ er elektronenergien. I kvart nivå kan det vera to elektron. Systemet kan utveksla partiklar med eit partikkelreservoar. I middel er det $\langle N \rangle$ elektron i systemet.

- a) Finn Fermienergien $\epsilon_F = \mu(0)$ til systemet, uttrykt ved $\langle N \rangle$, l , h og m .
- b) Finn middelenergien til elektrona i systemet ved $T = 0$, uttrykt ved ϵ_F .

Oppgitt:

- 1) Det middels besettestalet for tilstand nr. k for Fermion , er

$$\langle n_k \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} + 1} ,$$

der $\beta = \frac{1}{kT}$.

2)
$$\int_0^{\infty} \frac{x^n dx}{e^{x-\beta\mu} + 1} \rightarrow \frac{(\beta\mu)^{n+1}}{n+1} \quad \text{når } T \rightarrow 0 .$$