

EKSAMEN I FAG 715 15  
STATISTISK MEKANIKK  
(ved Lærarhøgskolen Statistisk mekanikk F 113)

Tysdag 10. desember 1985

kl. 0900 - 1500

Tillatne hjelpemiddel: Kalkulator

K. Rottmann: Matematische Formelsammlung

K.J. Knutsen: Formler og data i fysikk

O. Øgrim: Størrelser og enheter i fysikken

Fagleg kontakt: K. Budal, tlf. 3455

-----

Oppgave 1

Ein gass av molekyl er i termisk likevekt ved temperaturen  $T$ . Farten til eit molekyl er  $\vec{v} = \{v_x, v_y, v_z\}$ . Molekylmassen er  $m$ .

Finn ved enkle resonement uttrykk for følgjande storleikar:

a)  $\langle v_x \rangle$

b)  $\langle v_x^2 \rangle$

c)  $\langle v^2 v_x \rangle$

d)  $\langle v_x^2 v_y \rangle$

e)  $\langle (v_x + bv_y)^2 \rangle$ ,  $b = \text{konstant}$ .

Ekvipartisjonsprinsippet skal reknast som kjent.

Oppgåve 2

Partisjonsfunksjonen  $Z$  til eit kanonisk system av partiklar, er

$$Z = \sum_n e^{-\beta E_n}$$

der  $\beta = (kT)^{-1}$  og summasjonen er over alle tilstandane til systemet.

a) Vis at middelenergien  $U = \langle H \rangle$  til systemet kan skrivast

$$\langle H \rangle = - \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$$

b) Finn  $\langle H^2 \rangle$  uttrykt ved  $Z$ .

c) Finn energifluktuasjonen  $\Delta U = \sqrt{\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2}$  til systemet. Vis at  $\Delta U$  kan uttrykkast som ein funksjon av  $\partial U / \partial \beta$ .

d) Finn også  $\Delta U$  uttrykt ved  $T$ ,  $k$  og  $C_V$ , der  $C_V$  er varmekapasiteten til systemet.

e) Vi går ut frå at systemet er ein ideell, monoatomisk gass med i alt  $N$  atom.

Bruk resultatet fr  c) til   finna den relative energifluktuasjonen  $\Delta U / U$ , uttrykt ved partikkeltalet  $N$ .

Vi reknar at ekvipartisjonsprinsippet er kjent.

Oppgåve 3

Ein ideell kvantegass av identiske partiklar i eit opent system er i termisk likevekt med eit partikkelreservoar. Sannsynligheten for at einpartikkeltilstanden  $k$  skal innehalda  $n_k$  partiklar, er

$$p(n_k) = \frac{e^{\beta(\mu - \epsilon_k)n_k}}{\sum_{n_k} e^{\beta(\mu - \epsilon_k)n_k}}$$

der  $\mu$  er det kjemiske potensialet og  $\epsilon_k$  er einpartikkel-energien.

- Finns det middels besettelsestalet  $\langle n_k \rangle$  for i) fermionar og ii) bosonar.
- Skisser funksjonen  $\langle n_k \rangle$  som funksjon av storleiken  $\beta(\epsilon_k - \mu)$  for i) fermionar og ii) bosonar.
- Finns eit uttrykk for partikkelfluktuasjonen

$$\Delta n_k = \sqrt{\langle n_k^2 \rangle - \langle n_k \rangle^2}$$

for i) fermionar og ii) bosonar.

- Finns grenseverdien for den relative fluktuasjonen  $\Delta n_k / \langle n_k \rangle$  når  $\langle n_k \rangle$  går mot sin maksimalverdi for i) fermionar og ii) bosonar.

Vi ser nå på ein ideell bosongass i eit opent system som berre har to einpartikkeltilstandar med einpartikkelenergiene  $\epsilon_1 = 0$  og  $\epsilon_2 = \epsilon$ , respektivt.

- Kva er sannsynligheten for at systemet skal innehalda  $N$  partiklar og at alle partiklane er i den eksiterte tilstanden?
- Ved kva temperatur  $T$  vil det vera dobbelt så mange partiklar i grunntilstanden som i den eksiterte tilstanden? Vi reknar at det middels partikkeltalet  $\langle N \rangle$  i systemet er mykje større enn 1. Gjer rimelege tilnærmingar. Uttrykk  $T$  ved  $\langle N \rangle$  og  $\epsilon$ .