

Eksamen i
fag 92760 STATISTISK FYSIKK

Mandag 4. juni 1973

kl. 9.00 - 16.00

Oppgave 1

Fugasitetsutviklingen av tilstandsligningen er gitt ved Mayers ligninger

$$\frac{p}{kT} = \sum_{l=1}^{\infty} \bar{b}_l z^l ,$$

$$\rho = \sum_{l=1}^{\infty} l \cdot \bar{b}_l \cdot z^l ,$$

der ρ er tettheten og z er fugasiteten.

- a) Eliminer z (til tredje orden) og finn virialkoeffisientene B_2 og B_3 uttrykt ved $\bar{b}_2$ og $\bar{b}_3$.
- b) Gi en diagrammatisk karakterisering av koeffisienten $\bar{b}_l$. Hva er en irreducibel graf (stjerne)? Vis at alle grafer i B_3 som ikke er stjerner kansellerer.
- c) Virialutviklingen (tetthetsutviklingen) kan uttrykkes diagrammatisk som

$$\frac{p}{kT} = \rho + (1-\rho \frac{\partial}{\partial \rho}) \cdot (\text{sum av alle ulike umerkede irreducible grafer}).$$

Hva står en graf for i denne implisitte notasjon? Hva er en grafs symmetritall? Hva er symmetritallene for de irreducible grafer som inngår i B_2 og B_3 ?

Oppgave 2.

For et todimensjonalt plasma bestående av N positive og N negative ladninger antar vi vekselvirkningen

$$U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_{2N}) = - \sum_{i < j} q_i q_j \ln |\vec{r}_i - \vec{r}_j| ,$$

dvs. feltet rundt en punktladning varierer logaritmisk med avstanden.

Her er $q_i = \pm q$ lik ladningen til partikkel nr. i , og vi antar at gassen er innelukket i en todimensjonal "beholder" med "volum" $V = L^2$. Temperaturen er T .

- Vis (ved å innføre dimensjonsløse integrasjonsvariable) at den eksplisitte volumavhengighet av konfigurasjonsintegralet Q kan finnes (selv om Q ikke kan beregnes eksakt), og finn tilstandsligningen $p = p(\rho, T)$. Hvilken nedre grense T_0 for T gir tilstandsligningen hvis trykket skal være positivt?
- Konfigurasjonsintegralet kan divergere for konfigurasjoner der motsatt ladede partikler faller sammen. Finn den laveste temperatur T_1 som gir konvergent konfigurasjonsintegral. Anta at plasmaet ved lave temperaturer faller sammen til N nøytrale par uten gjensidig vekselvirkning. Sammenlign en isochor for en slik gass med tilsvarende isochor for tilstandsligningen under pkt.a), og finn ved hvilken temperatur de to isochorene skjærer hverandre.
- Med virialutviklingen som utgangspunkt vil vi beregne tilstandsligningen for et nøytralt (tredimensjonalt) plasma, bestående av like mange positive og negative ladninger, $\pm e$. Coulombpotensialet er gitt ved $\phi_{ij}(r) = q_i q_j / r$, der $q = e / \sqrt{4\pi\epsilon_0}$. Vi lar de positive ladninger danne en kontinuerlig uniform bakgrunn for de negative ladninger, og får virialutviklingen

$$\frac{p - p_{\text{ideell}}}{kT} = (1 - \rho \frac{\partial}{\partial \rho}) \cdot (\text{sum av alle ulike umerkede irreducible grafer unntatt } \bullet \text{---} \bullet),$$

hvor bare grafer med vekselvirkning mellom negative ladninger er inkludert.

I γ -utviklingen er summen av ringdiagrammene gitt ved

$$S = - \frac{\gamma^3}{16\pi^3} \int d\vec{k} [\ln(1 - \rho \tilde{v}) + \rho \tilde{v}] ,$$

hvor $\tilde{v}(k)$ er den Fouriertransformerte

$$\tilde{v}(k) = \int d\vec{r} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} v(\vec{r})$$

av potensialet $v(r) = \gamma^3 F(\gamma r)$. Benytt dette til å argumentere for at når ladningen q benyttes som utviklingsparameter er

tilstandsligningen til laveste orden (ut over ideell gass) gitt ved

$$p = kT\rho - \frac{q^3}{3} \sqrt{\frac{\pi}{kT}} \rho^{\frac{3}{2}} .$$

Oppgave 3

"Klassiske" teorier for det kritiske punkt til en ferromagnet antar at den fri energi er analytisk i Curiepunktet. Antagelsen kan formuleres som en Taylorutvikling i t og M , dvs.

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= a(T)M + b(T)M^3 + \dots, \\ a(T) &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots, \\ b(T) &= b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots, \end{aligned} \quad (1)$$

der $\mathcal{H}$ er det ytre magnetfelt, M er magnetiseringen, og $t = T - T_c$.

- a) Bestem a_0 og bruk antagelsene (1) ovenfor til å finne de "klassiske" kritiske indekser som nær Curiepunktet beskriver den kritiske isotherm $\mathcal{H}(M, T=T_c)$, den spontane magnetisering $M_0(T < T_c)$, og den isoterme susceptibilitet $\chi_0 = \lim_{\mathcal{H} \rightarrow 0} \left(\frac{\partial M}{\partial \mathcal{H}} \right)_T$.
- b) Vis ved hjelp av den termodynamiske identitet

$$dF = -SdT + \mu_0 \mathcal{H}dM, \quad (2)$$

der F er Helmholtz' fri energi, S er entropien og μ_0 er den absolutte permeabilitet, at entropien generelt kan skrives som

$$S(T, M) = S_0(T) - \mu_0 \int_0^M dM \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial T} \right)_M. \quad (3)$$

Anta at $S_0(T)$ er analytisk for $T = T_c$ og bruk dette til å bestemme de kritiske indekser som beskriver den spesifikke varmen (varmekapasiteten) i null felt, dvs. $C_{\mathcal{H}=0}$.

- c) Fra termodynamiske argumenter kan det utledes ulikheter mellom de kritiske indeksene. Vis at for $T < T_c$ gjelder ulikheten

$$\alpha' + 2\beta + \gamma' \geq 2, \quad (4)$$

som forbinder de asymptotiske forløp av

$$\begin{aligned} C_{H=0} &\sim (T_c - T)^{-\alpha'} , \\ M_0 &\sim (T_c - T)^\beta , \\ \text{og} \quad \chi_0 &\sim (T_c - T)^{-\gamma'} . \end{aligned} \tag{5}$$

Gjelder ulikheten (4) for tallverdiene funnet under pkt.a og b?