

Eksamen i
fag 92760 STATISTISK FYSIKK
Torsdag 6. juni 1974
kl. 0900 - 1600

Oppgave 1.

Gi den fysiske betydning av parfordelingsfunksjonen $n_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2; T, V, N)$ for et system av N partikler i volumet V ved temperaturen T . Finn et uttrykk for parfordelingsfunksjonen ut fra den kanoniske fordeling og beregn n_2 for en ideell gass. I den såkalte makroskopiske grense går n_2 mot funksjonen $\bar{n}_2$. Hva består grenseprosessen i i dette tilfellet?

For en gass der molekylerne vekselvirker parvis via parpotensialet $\phi(r)$ er virialutviklingen (tetthetsutviklingen) av $\bar{n}_2(r_{12})$ gitt ved summen av alle irreducible grafer med to rotpunkter. Hva betyr "irreducible" her? Skriv opp alle grafene i $\bar{n}_2(r_{12})$ til og med fjerde orden i tettheten.

Når parfordelingsfunksjonen er kjent kan tilstandsfunksjonen $p = p(\rho, T)$ beregnes via fluktuasjonsteoremet

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T = kT \left[1 + \rho^{-1} \int (\bar{n}_2(r) - \rho^2) d\vec{r} \right]^{-1}$$

eller via virialteoremet

$$p = kT\rho - \frac{1}{6} \int r \phi'(r) \bar{n}_2(r) d\vec{r} \quad .$$

Vis at begge relasjoner gir samme uttrykk for trykket til annen orden i tettheten ρ .

Elektromagnetisk stråling med bølgelengde λ spres mot en gass med partikkeltetthet ρ . Finn spredningsintensiteten $I(\theta)$ (utenfor den innfallende stråle), uttrykt ved spredningsintensiteten $I_0(\theta)$ for den tilsvarende ideelle gass og ved parkorrelasjonsfunksjonen $G(r)$. Hvorfor gjelder relasjonen ikke uten videre ved nøytronspredning? Vis at for langbølget lys fås spesielt sterk spredning nær det kritiske punkt.

Oppgave 2.

Tilstandslikningen for en ferromagnet i nærheten av det kritiske punkt kan representeres ved

$$M = \begin{cases} rH^a t^{-b} \exp\left[-s \sqrt{\ln^2(Ht^{-u}) + v^2}\right] & \text{for } t > 0 \\ q|t|^c + rH^a |t|^{-b} \exp\left[-s \sqrt{\ln^2(H|t|^{-u}) + w^2}\right] & \text{for } t < 0. \end{cases}$$

Her er M magnetiseringen, H det ytre magnetfelt (forutsatt > 0), $t = T - T_c$ er temperaturavviket fra den kritiske temperatur T_c , og a, b, c, q, r, s, u, v og w er reelle positive konstanter. I uttrykket skal den positive kvadratroten velges.

De kritiske indekser $\gamma, \gamma', \delta, \beta, \alpha$ og α' er definert ved følgende asymptotiske uttrykk i nærheten av det kritiske punkt:

Susceptibilitet i null felt: $\chi = \lim_{H \rightarrow 0} \left(\frac{\partial M}{\partial H} \right)_T = \begin{cases} \text{konst. } t^{-\gamma} & (t > 0) \\ \text{konst. } |t|^{-\gamma'} & (t < 0) \end{cases}$

Kritisk isotherm: $H(t \rightarrow 0) \sim \text{konst. } M^\delta$

Spontan magnetisering: $M(H \rightarrow 0) \sim \text{konst. } |t|^\beta \quad (t < 0)$

Varmekapasitet i null felt: $C_{H \rightarrow 0} \sim \begin{cases} \text{konst. } t^{-\alpha} & (t > 0) \\ \text{konst. } |t|^{-\alpha'} & (t < 0) \end{cases}$

Samtlige konstanter (betegnet konst.) forutsettes endelige.

a) Vis at følgende relasjoner må være oppfylt:

$$\begin{aligned} s &= 1-a \\ u &= b/(1-a) \end{aligned} ,$$

og beregn de kritiske indekser γ, γ', β og δ , uttrykt ved a og b .

b) Den oppgitte tilstandslikning er en relasjon mellom de termodynamiske størrelser M , H og t . Vis at for den spesielle verdi

$$c = \frac{2a-1}{1-a} b$$

kan tilstandslikningen skrives som en relasjon mellom t og

størrelser x og y , der x er en kombinasjon av $\mathcal{H}$ og t , mens y er en kombinasjon av M og t .

- c) Gibbs funksjon G er en funksjon av to variable, $\mathcal{H}$ og t . Anta at nær det kritiske punkt kan relasjonen mellom $G, \mathcal{H}$ og t skrives som en relasjon, $z = g(x)$, mellom to størrelser x og z , der x er samme kombinasjon av $\mathcal{H}$ og t som ovenfor, og $z = Gt^{-2ab/(1-a)}$. (c har samme verdi som funnet under punkt b).

Bestem ved hjelp av dette de kritiske indekser α og α' uttrykt ved a og b .

Oppgitt:
$$M = - \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\partial G}{\partial \mathcal{H}} \right)_T$$

$$C_{\mathcal{H}} = -T \left(\frac{\partial^2 G}{\partial T^2} \right)_{\mathcal{H}} .$$