

Eksamen TFY 4230 Statistisk Fysikk

Faglærer: Professor Jens O. Andersen
Institutt for Fysikk, NTNU
Telefon: 73593131

Tirsdag 5 desember 2006
09.00-13.00

Hjelpemiddel:
Godkjend kalkulator
Rottmann: Matematisk Formelsamling
Rottmann: Matematische Formelsammlung
Barnett & Cronin: Mathematical Formulae

Oppgave 1

Ein partikkel bevegar seg i ein romleg dimensjon i eit potensial $V(x) = V_0\sqrt{|x|}$, der V_0 er ein positiv konstant. Hamiltonfunksjonen er

$$H = \frac{p^2}{2m} + V_0\sqrt{|x|} ,$$

der m er massen til partiklen. Partiklen har energi E i det mikrokanoniske ensemblet. Sannsynlegheitsfordelinga $P(p, x)$ er

$$P(p, x) = c \delta(E - H) ,$$

der c er ein normaliseringskonstant.

a) Vis at den normaliserte marginalfordelinga $P(p)$ er gitt ved

$$P(p) = \frac{3}{4} \frac{1}{E\sqrt{2mE}} \left(E - \frac{p^2}{2m} \right),$$

for $|p| \leq \sqrt{2mE}$ og null ellers. Skisser funksjonen $P(p)$.

b) Rekn ut forventningsverdien $\langle \frac{p^2}{2m} \rangle$. Bruk dette resultatet til å finne forventningsverdien $\langle \sqrt{|x|} \rangle$.

Vi skal nå sjå på dette systemet i det kanoniske ensemblet ved temperaturen T .

c) Rekn ut partisjonsfunksjonen Z . Hint: Bruk substitusjonen $y = \sqrt{x}$.

d) Rekn ut forventningsverdien $\langle \sqrt{|x|} \rangle$. Uttrykk svaret ved $\langle E \rangle$ og V_0 . Samanlikn resultatet med svaret du fekk i b).

Oppgave 2

Ein partikkel kan vere i to tilstandar med energi $\epsilon_1 = -\epsilon_0$ og $\epsilon_2 = \epsilon_0$, der ϵ_0 er ein konstant. For eit system med N slike partiklar som er skillbare og som ikkje vekselverkar er den kanoniske partisjonsfunksjonen Z_N er da gitt ved

$$Z_N = 2^N \cosh^N(\beta\epsilon_0), \quad N = 1, 2, 3, \dots$$

Definer i tillegg $Z_0 = 1$. I denne av oppgava skal vi studere dette systemet i det storkanoniske ensemblet.

a) Vis at den storkanoniske partisjonsfunksjonen er gitt ved

$$\Theta = \frac{1}{1 - 2e^{\beta\mu} \cosh(\beta\epsilon_0)}.$$

b) Rekn ut det midlere partikkeltalet $\langle N \rangle$.

c) Bruk dette resultatet til å rekne ut det kjemiske potensialet μ som funksjon av $\langle N \rangle$, β , og ϵ_0 .

d) La $P(N)$ vere sannsynlegheiten for at det er nøyaktig N partiklar i systemet. Uttrykk $P(N)$ ved hjelp av N og $\langle N \rangle$.

Oppgave 3

I denne oppgava skal vi studere ein ideell Fermigass i to romlege dimensjonar. Massen til fermiona er m og volumet er $V = L^3$. Det er ingen degenerasjon. I den termodynamiske grensa er partikkeltettheiten, energitettheiten og trykket gitt ved uttrykka

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{1}{\hbar^3} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1} , \\ \frac{E}{V} &= \frac{1}{\hbar^3} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\epsilon}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1} , \\ P &= \frac{k_B T}{\hbar^3} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \ln [1 + e^{-\beta(\epsilon-\mu)}] ,\end{aligned}$$

der μ er det kjemiske potensialet og $\epsilon = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$.

a) Ta grensa $T \rightarrow 0$ og vis at partikkeltettheiten er gitt ved

$$\rho = \frac{p_F^3}{4\pi\hbar^3} ,$$

der Fermi-impulsen p_F er definert ved $\mu = \sqrt{p_F^2 c^2 + m^2 c^4}$.

b) Ta grensa $T \rightarrow 0$ og vis at energitettheiten og trykket er gitt ved

$$\begin{aligned}\frac{E}{V} &= \frac{1}{6\pi\hbar^3 c^2} \left[(p_F^2 c^2 + m^2 c^4)^{3/2} - m^3 c^6 \right] , \\ P &= \frac{1}{12\pi\hbar^3} \left[3p_F^2 \sqrt{p_F^2 c^2 + m^2 c^4} - \frac{2}{c^2} (p_F^2 c^2 + m^2 c^4)^{3/2} + 2m^3 c^4 \right] .\end{aligned}$$

c) Ta den ultrarelativistiske grensa og finn tilstandslikninga.

d) Finn den ikkje-relativistiske grensa av energitettheiten ved å rekkeutvikle til fjerde orden i $y = p_F/mc \ll 1$. Kva er tolkninga av det første leddet?

Oppgave 4

Denne oppgava består av fire oppgaver som ein kan svare på uavhengig av kvarandre.

a) Formuler ekvipartisjonsprinsippet i klassisk statistisk mekanikk.

b) Skriv ned Hamiltonfunksjonen for den ein-dimensjonale Isingmodellen

med nærmaste-nabo vekselverknad i eit ytre magnetfelt og med periodiske randkrav. Forklar betydninga av dei ulike ledda. Kva er grunntilstandskonfigurasjonen for ein antiferromagnetisk Isingmodell i null ytre felt?

c) Materie i ein kvit dverg er i hydrostatisk likevekt. Gjer kort greie for dei kreftene som motverkar gravitasjonell kollaps.

d) Kva er kriteriet for ikkje-degenerasjon og klassisk oppførsel til ein kvantegass?
