



NTNU

Fakultet for Naturvitenskap og Teknologi
Institutt for Fysikk

Eksamen TFY 4230 Statistisk Fysikk Hausten 2007

Faglærer: Professor Jens O. Andersen
Institutt for Fysikk, NTNU
Telefon: 73593131

Onsdag 19. desember 2007
kl. 09.00-13.00

Hjelpemiddel:
Godkjend kalkulator
Rottmann: Matematisk Formelsamling
Rottmann: Mathematische Formelsammlung
Barnett & Cronin: Mathematical Formulae

Oppgave 1

I denne oppgava skal vi studere ein ideell klassisk gass i to romlege dimensjonar. Gassen er i eit “volum” $V = L^2$ og det er N partiklar med masse m . Hamiltonfunksjonen til systemet er

$$H = \sum_{i=1}^N \sqrt{c^2 p_i^2 + m^2 c^4},$$

der c er lyshastigheiten, $\mathbf{p}_i$ er impulsen til partikkel nummer i , og $p_i = |\mathbf{p}_i|$. Partisjonsfunksjonen for gassen er Z_N og kan skrivast som

$$Z_N = \frac{Z^N}{N!}, \quad (1)$$

der

$$Z = \frac{1}{h^2} \int d^2p d^2x e^{-\beta \sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4}}.$$

1) Gjer greie for faktoren $N!$ i likning (1). Vis at

$$Z = \frac{2\pi V}{(\beta h c)^2} (1 + \beta m c^2) e^{-\beta m c^2}.$$

2) Finn den midlere energien $\langle E \rangle$ for gassen. Ta den ikkje-relativistiske grensa av $\langle E \rangle$ ($\beta m c^2 \gg 1$) og tolk resultatet.

3) Den ultrarelativistiske grensa svarer til $m = 0$. Ein kan rekkeutvikle uttrykket for $\langle E \rangle$ rundt $m = 0$. Dette er ei rekke i $\beta m c^2 \ll 1$. Finn første korreksjon til den ultrarelativistiske grensa.

4) Finn varmekapasiteten $C_V = \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T}$.

Oppgave 2

I denne oppgava skal vi sjå på ein ein-dimensjonal Ising model med N spinn.

1) Dersom det ikkje er noko ytre magnetfelt er Hamiltonfunksjonen for denne modellen

$$H = -J \sum_{i=1}^{N-1} s_i s_{i+1}.$$

Forklar tydinga av J . Gjer spesielt greie for forteiknet til J .

2) La $\langle s_i \rangle$ vere middelveien til spinn s_i . Forklar kvifor $\langle s_i \rangle = 0$. Her treng du ikkje rekne - eit enkelt resonnement er tilstrekkeleg.

3) Dersom det er eit ytre magnetfelt B , er det eit tilleggsledd i Hamiltonfunksjonen. Dette leddet kallar vi H_B . Skriv ned eit uttrykk for H_B og gjer greie for dei ulike faktorane.

Oppgave 3

I denne oppgava skal vi studere ein Bosegass i to romlege dimensjonar. Massen til bosonane er m og "volumet" til gassen er $V = L^2$. Uttrykket

for tettheten ρ er

$$\rho = \frac{1}{V} \frac{1}{e^{-\beta\mu} - 1} + \frac{1}{\hbar^2} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} - 1} ,$$

der $\epsilon = p^2/2m$, μ er det kjemiske potensialet og $\beta = 1/k_B T$. Det første leddet representerer tettheten av bosonar i grunntilstanden og det andre leddet er tettheten av bosonar i dei eksiterte tilstandane. Det andre leddet skriv vi som ρ_{ex} .

1) Vis at ρ_{ex} kan skrivast som

$$\rho_{\text{ex}} = -\frac{1}{\Lambda^2} \ln(1 - e^{\beta\mu}) ,$$

der Λ er den termiske bølgelengda.

2) Ved høg temperatur kan vi skrive ρ og $P/k_B T$ som rekker i fugasiteten $z = e^{\beta\mu}$:

$$\begin{aligned} \rho &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n , \\ \frac{P}{k_B T} &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n , \end{aligned}$$

Rekn ut koeffisientane a_1 , a_2 , b_1 og b_2 . Bruk dette til å rekne ut den andre virialkoeffisienten $B_2(T)$ i virialutviklinga for den todimensjonale Bosegassen. Kommentér resultatet.

3) Kva er den kritiske temperaturen T_c for Bose-Einstein kondensasjon i to romlege dimensjonar? Grunnlegg svaret.

Oppgave 4

I denne oppgava skal vi studere N spinn-1/2 partiklar i tre dimensjonar i eit volum V . Partiklane vekselverkar ikkje, men dei er i eit ytre magnetfelt $\mathbf{B}$ ved $T = 0$. Hamiltonfunksjonen for ein partikkel er

$$H = \frac{p^2}{2m} - \mu \cdot \mathbf{B} ,$$

der μ er det magnetiske momentet, $\mathbf{p}$ er impulsen og m er massen. Dersom magnetfeltet peiker i z -retning er energien gitt ved

$$\epsilon_{\pm}(p) = \frac{p^2}{2m} \mp \mu B ,$$

der øvre forteikn er for ein partikkel med spinn opp og nedre forteikn for ein partikkel med spinn ned. La N_+ vere antal partiklar med spinn opp og N_- vere antal partiklar med spinn ned. Ved $T = 0$ er alle energinivåa opp til Fermienergien ϵ_F fylt opp medan energinivåa med energi høgare energi enn ϵ_F er tomme.

1) La p_F^+ vere Fermiimpuls for partiklar med spinn opp og p_F^- vere Fermiimpuls for partiklar med spinn ned. Uttrykk Fermi-impuls $p_F^{\pm}$ som funksjon av ϵ_F i dei to tilfella.

2) Vis at $N_{\pm}$ kan skrivast som

$$N_{\pm} = \frac{V}{2\pi^2\hbar^3} \int_0^{p_F^{\pm}} p^2 dp ,$$

der V er volumet til systemet.

3) Finn $N_{\pm}$ og uttrykk svaret som funksjon av ϵ_F .

4) Magnetiseringa er gitt ved

$$M = \mu (N_+ - N_-) .$$

For små verdier av magnetfeltet ($\mu B \ll \epsilon_F$) kan vi skrive

$$M = \chi B ,$$

der χ er susceptibiliteten. Finn χ .

Opgitt formel:

$$\rho = \frac{1}{h^3} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \theta(\epsilon_F - \epsilon) .$$