



NTNU

Fakultet for Naturvitenskap og Teknologi
Institutt for Fysikk

Eksamen TFY 4230 Statistisk Fysikk Hausten 2008

Faglærer: Professor Jens O. Andersen
Institutt for Fysikk, NTNU
Telefon: 73593131

Onsdag 17. desember 2008
kl. 09.00-13.00

Hjelpemiddel:
Godkjend kalkulator
Rottmann: Matematisk Formelsamling
Rottmann: Matematische Formelsammlung
Barnett & Cronin: Mathematical Formulae

Oppgavesettet er på fire sider. Les oppgåvene nøye. Lykke til.

Oppgave 1

I denne oppgåva skal vi studere diffusjon i ein romleg dimensjon. La $C(x, t)$ vere konsentrasjonen til eit stoff løyst opp i vatn som funksjon av koordinaten x og tida t . Diffusjonslikninga er

$$\frac{\partial C(x, t)}{\partial t} - D \frac{\partial^2 C(x, t)}{\partial x^2} = 0.$$

a) Kva er D ? Vis at diffusjonslikninga kan skrivast som ei kontinuitetslikning og gje ei fysisk tolkning av denne likninga.

b) Løys diffusjonslikninga i det tilfellet der konsentrasjonen ved $t = 0$ er gitt ved

$$C_0(x) = C(x, t = 0) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha x^2} .$$

Her er α ein konstant. Hint: Ein Fouriertransformasjon av $C(x, t)$ kan gjere susen.

Oppgåve 2

I denne oppgåva skal vi studere Ising-modellen i ein romleg dimensjon. Hamiltonfunksjonen for ein Ising-modell i eit ytre magnetfelt B med N spinn og periodiske randkrav er

$$H = -\mu B \sum_{i=1}^N s_i - J \sum_{i=1}^N s_i s_{i+1} ,$$

der $s_{N+1} = s_1$, og μ og J er konstantar.

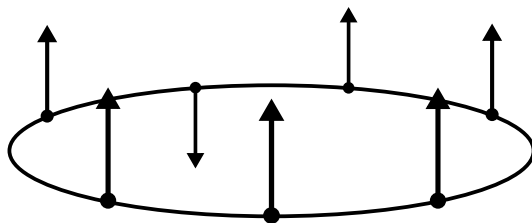


Figure 1: Isingkjede med periodiske randkrav.

a) Gjer greie for dei to ledda i Hamiltonfunksjonen.

b) La $N = 2$. Finn alle moglege spinnkonfigurasjonar og dei tilhøyrande energiane. Rekn ut partisjonsfunksjonen Z_2 .

c) Pga symmetrien har vi $\langle s_1 \rangle = \langle s_2 \rangle = \langle s \rangle$, der

$$\langle s \rangle = \frac{1}{2} \frac{1}{\beta \mu} \frac{\partial \ln Z_2}{\partial B} .$$

Rekn ut $\langle s \rangle$. Ta grensa $B \rightarrow \infty$ og tolk resultatet.

d) I resten av oppgåva er $J = 0$. Rekn ut partisjonsfunksjonen Z_N i dette tilfellet. Rekn ut den midlere energien $\langle E \rangle$.

Oppgåve 3

Vi skal studere ein klassisk ideell gass i likevekt ved temperaturen T . Det er N partiklar som har masse m og dei bevegar seg i eit volum V .

a) Vis at den kanoniske partisjonsfunksjonen Z_N er

$$Z_N = \frac{V^N}{N!} \left(\frac{2m\pi}{h^2\beta} \right)^{\frac{3N}{2}}.$$

b) Finn tilstandslikninga for gassen.

c) Vi skal nå studere den same gassen i det storkanoniske ensemblet. I dette ensemblet varierer partikkeltalet og $P(N)$ er sannsyna for at det er nøyaktig N partiklar i systemet. Vis at N er Poissonfordelt og finn parameteren t .

d) Finn tilstandslikninga for gassen i det storkanoniske ensemblet. og samanlikn resultatet med det du fann i punkt b).

Oppgåve 4

Det er fire spørsmål som du kan svare på uavhengig av kvarandre.

a) Definer transiente og rekurrente tilstandar for ei Markovkjede X_n .

b) Forklar kort omgrepet kvantetrykk for degenererte Fermigassar. Kva krefter i ein kvit dverg sørgjer for at den er i hydrostatisk likevekt?

c) I denne oppgåva skal vi studere termodynamikken til diatomiske molekyl. Vi kan tilnærme eit slikt molekyl med ein stiv rotator med Hamiltonoperator

$$H = \frac{\mathbf{L}^2}{2I},$$

der $\mathbf{L}$ er dreieimpulsoperatoren og I er tregheitsmomentet til molekylet. Energiane til systemet er gitt ved

$$E_{l,m} = \frac{l(l+1)\hbar^2}{2I},$$

der $l = 0, 1, 2, \dots$ er dreieimpulsen og $m = -l, -l+1, \dots, l$ er z -komponenten til dreieimpulsen. For ein gitt verdi av l er degenerasjonsgraden til rotatoren $g(l) = 2l+1$. Partisjonsfunksjonen er

$$Z = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{-l(l+1)\Theta_R/T},$$

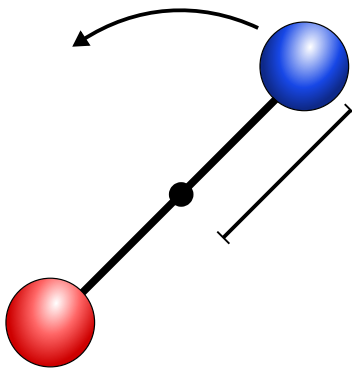


Figure 2: Toatomig molekyl.

der $\Theta_R = \frac{\hbar^2}{2Ik_B}$ er den karakteristiske temperaturen. Rekn ut Z for $T \gg \Theta_R$ og finn den midlere energien $\langle E \rangle$.

d) I denne oppgåva skal vi studere ein ideell Bose gas i d romlege dimensjonar i eit “volum” V . Dispersjonsrelasjonen er

$$\epsilon = p^n ,$$

der n er eit heiltal. Du kan sette $\mu = 0$. Vis at

$$P = \frac{n}{d} \frac{\langle E \rangle}{V} .$$

Nyttige formlar:

$$\begin{aligned} \frac{\langle E \rangle}{V} &= \frac{1}{\hbar^d} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{\epsilon}{e^{\beta\epsilon} - 1} \\ \frac{P}{k_B T} &= \pm \frac{1}{\hbar^d} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \ln [1 \pm e^{-\beta(\epsilon - \mu)}] \\ \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} &= \frac{2^{1-d}}{\pi^{d/2} \Gamma(d/2)} \int_0^\infty dp p^{d-1} \end{aligned}$$

$$P(n) = \frac{e^{-t} t^n}{n!} .$$

$$\begin{aligned} f(p) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx} f(x) dx , \\ f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} f(p) dp . \end{aligned}$$