

Kontinuasjonseksamen TFY 4230

Statistisk Fysikk

Faglærer: Professor Jens O. Andersen
Institutt for Fysikk, NTNU
Telefon: 73593131

15. august 2009
kl. 09.00-13.00

Hjelpemiddel:
Godkjend kalkulator
Rottmann: Matematisk Formelsamling
Rottmann: Mathematische Formelsammlung
Barnett & Cronin: Mathematical Formulae

Les oppgåvene nøye. Oppgavesettet er på tre sider.

Oppgave 1

I det storkanoniske ensemblet er partikkeltalet N ikke konstant. Finn mid-
delverdien $\langle N \rangle$ og fluktuasjonane $(\Delta N)^2$ uttrykt ved hjelp av det kjemiske
potensialet μ , $\beta = 1/k_B T$ og den storkanoniske partisjonsfunksjonen Θ .

Oppgave 2

I denne oppgåva skal vi sjå på ein ein-dimensjonal Ising model med N spinn.
Dersom det ikke er noko ytre magnetfelt er Hamiltonfunksjonen for denne

modellen

$$H = -J \sum_{i=1}^{N-1} s_i s_{i+1} .$$

- 1) Rekn ut partisjonsfunksjonen Z_N .
- 2) La $\langle s_i \rangle$ vere middelveien til spinn s_i . Forklar kvifor $\langle s_i \rangle = 0$. Her treng du ikkje rekne - eit enkelt resonnement er tilstrekkeleg.
- 3) Dersom det er eit ytre magnetfelt B , er det eit tilleggsledd i Hamiltonfunksjonen. Dette leddet kallar vi H_B . Skriv ned eit uttrykk for H_B og gjer greie for dei ulike faktorane.

Oppgåve 3

Definer transiente og rekurrente tilstandar for ei Markovkjede X_n .

Oppgåve 4

Vi har eit system av to identiske partiklar som ikkje vekselverkar. Det er to ein-partikkeltilstandar 1 og 2 med energi $\epsilon_1 = -\epsilon$ og $\epsilon_2 = \epsilon$, der ϵ er ein konstant.

- 1) Rekn ut partisjonsfunksjonen i dei tilfella der partiklane tilfredsstiller Maxwell-Boltzmann statistikk, Bose-Einstein statistikk, og Fermi-Dirac statistikk.
- 2) Kva er den midlere energien $\langle E \rangle$ for $T = 0$ i dei tre tilfella?

Oppgåve 5

Kva er trykket P til ein ideell Bose-gass ved $T = 0$? Kva er trykket P til ein ideell klassisk gass ved $T = 0$?

Oppgave 6

La ρ vere tettheten av mikrotilstandar i faserommet for eit system med N partiklar i tre romlege dimensjonar. Forklar kvifor ρ tilfredsstiller kontinu-
itetslikninga

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 ,$$

der $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$, og der $\mathbf{v}$ på komponentform er $(\dot{p}_1, \dot{p}_2, \dots, \dot{p}_{3N}, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_{3N})$. Bruk dette resultatet og Hamiltons likningar til å vise Liouvilles teorem

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \{\rho, H\} ,$$

der H er Hamiltonfunksjonen til systemet og $\{A, B\}$ er Poissonparentesen mellom A og B .

Oppgave 7

Kva er ein syklisk koordinat? Vis at ein syklisk koordinat impliserer ein bevart storleik.

Oppgave 8

Skriv ned Hamiltonfunksjonen for ein eindimensjonal harmonisk oscillator med masse m og frekvens ω .

Oppgitte formalar:

$$\begin{aligned} P(N) &= \frac{e^{\beta \mu N}}{\Theta} Z_N , \\ \{A, B\} &= \sum_{i=1}^{3N} \left[\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \right] \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) &= \frac{\partial L}{\partial q} , \\ \langle E \rangle &= - \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} . \end{aligned}$$