

NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPLIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:

Øyvind Borck

Tilgjengelig på telefon 408 59 107 mellom kl. 11.00 og 13.00

Eksamen TFY4230: Statistisk fysikk

Lørdag 21. august 2010
kl. 09.00–13.00

Oppgavesettet består av tre oppgaver på tre sider.

Tillatte hjelpemidler: C.

Godkjent, enkel kalkulator

K. Rottmann: Matematisk formelsamling

K. Rottmann: Mathematische Formelsammlung

Barnett & Cronin: Mathematical Formulae

Alle delspørsmål teller likt. Les oppgavene nøye. Lykke til!

Oppgave 1

Toatomige molekyler, som for eksempel CO, kan vibrere langs aksen. Vi skal først beskrive molekylet som en klassisk, endimensjonal harmonisk oscillator:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2$$

- Beregn partisjonsfunksjonen Z .
- Beregn midlere energi $\langle E \rangle$ og varmekapasitet C_V for den harmoniske oscillator.
- Midlere energi (og dermed varmekapasiteten) kunne du funnet ved hjelp av ekvipartisjonsprinsippet. Forklar.

Vi skal nå beskrive det toatomige molekylet kvantemekanisk. Energiegenverdiene til en endimensjonal harmonisk oscillator er:

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2 \dots$$

Egenverdiene er ikke degenererte.

- d) Beregn partisjonsfunksjonen Z .
- e) Beregn midlere energi $\langle E \rangle$ og varmekapasitet C_V .
- f) Finn lavtemperaturgrensa for $\langle E \rangle$ og C_V .
- g) Finn høytemperaturgrensa for $\langle E \rangle$ og C_V .
- h) Lag to plot (skisser!) som viser $\langle E \rangle$ og C_V som funksjon av T og sammenlign oppførselen til den klassiske og kvantemekaniske oscillatoren.
- i) Hva menes med utfrysing av frihetsgrader?

Oppgave 2

En kjede med tre Isingspinn har Hamiltonfunksjon:

$$H = -J(s_1 s_2 - s_2 s_3)$$

hvor J er en *positiv* konstant.

- a) Skriv ned alle konfigurasjonene og de tilhørende energiene.
- b) Vis at partisjonsfunksjonen kan skrives som

$$Z = 8 \cosh^2(\beta J)$$

- c) Regn ut midlere energi $\langle E \rangle$. Finn $\langle E \rangle$ i grensen $T \rightarrow 0$ og tolk resultatet.
- d) Regn ut korrelasjonsfunksjonen $\langle s_1 s_3 \rangle$. Ta grensen $T \rightarrow 0$ og tolk resultatet.

Oppgave 3

I denne oppgaven skal vi studere en ideell Bosegass i d dimensjoner. Partikkeltettheten ρ er gitt ved

$$\rho = C_d \int_0^\infty d\varepsilon \frac{\varepsilon^{(d-2)/2}}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1}$$

der C_d er en dimensjonsavhengig størrelse.

- a) Hvilken begrensing gjelder på verdiene det kjemiske potensialet μ kan ta? Begrunn.

Restriksjonen på μ impliserer en maksimal partikkeltetthet ρ_{maks} .

b) Vis at

$$\rho_{\text{maks}} = C_d (kT)^{d/2} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \zeta\left(\frac{d}{2}\right)$$

der $\Gamma(s)$ er Gammafunksjonen og $\zeta(s)$ er Riemanns zetafunksjon. Den kritiske temperaturen T_c for Bose-Einstein-kondensasjon er den laveste temperaturen hvor partikkeltettheten er lik ρ_{maks} .

c) Finn T_c .

d) I hvilke dimensjoner er $T_c \neq 0$, det vil si, i hvilke dimensjoner kan en ha Bose-Einstein-kondensasjon?

Oppgitt:

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty dt t^{s-1} e^{-t}, \quad s > 0$$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}, \quad s > 1$$