



Faglig kontakt under eksamen:
Professor Kåre Olaussen
Telefon: 9 36 52 eller 45 43 71 70

Eksamen i TFY4230 STATISTISK FYSIKK

Mandag 12. august, 2013
09:00–13:00

Tillatte hjelpemidler: Alternativ **C**

Standard kalkulator (i henhold til NTNU's liste).

Ett A4 formelark; personlige håndskrevne notater er tillatt på dette.

K. Rottman: *Matematisk formelsamling* (alle språkutgaver).

Barnett & Cronin: *Mathematical Formulae*.

Dette oppgavesettet er på 2 sider.

Oppgave 1. Ideell gass av relativistiske partikler

I denne oppgaven skal du først se på et system av N identiske masseløse ikke-vekselvirkende partikler i et volum V . Hamilton-funksjonen for dette systemet er

$$H = \begin{cases} \sum_{n=1}^N |\mathbf{p}_n c| & \text{når alle } N \text{ partiklene er i volumet } V, \\ \infty & \text{ellers.} \end{cases} \quad (1)$$

Vi antar at tettheten $\rho = N/V$ er så lav at systemet kan betraktes som klassisk.

- Skriv ned* den kanoniske partisjonsfunksjonen Z_N for dette systemet ved temperaturen T .
- Regn ut den kanoniske partisjonsfunksjonen Z_N for dette systemet ved temperaturen T .
- Finn tilstandsligningen $P = P(N, V, T)$ for dette systemet.
- Finn den indre energien $E = \langle H \rangle$ til dette systemet.
- Finn Helmholtz fri energi $F = E - TS$ til dette systemet.
- Finn varmekapasiteten C_V (ved konstant volum) til dette systemet.
- Finn entropien S til dette systemet.
- Finn det kjemiske potensialet μ til dette systemet.
- Hva er den termiske de Broglie bølgelengden til disse partiklene?
- Omtrent ved hvilken tetthet vil du anta at kvantemekaniske effekter begynner å bli av betydning for dette systemet?

Oppgave 2. Bosoner i et harmonisk potensial

I denne oppgaven skal du studere en samling termiske bosoner som er fanget i et harmonisk potensial. For å forenkle regningen antar skal vi anta et endimensjonalt system. Enpartikkel-tilstandene er da gitt som løsninger av Schrödinger-ligningen

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2M} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} K x^2\right) \psi_n(x) = E_n \psi_n(x), \quad (2)$$

med enpartikkel-egenenergien $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$, der $\omega = \sqrt{K/M}$, og $n = 0, 1, \dots$

- Skriv ned* den store kanoniske partisjonsfunksjonen Ξ for dette systemet ved temperatur T (bruk variabelen $\beta = 1/(k_B T)$), og kjemisk potensial μ .
- Innfør *fugasiteten* $z = e^{\beta\mu}$, og regn ut $\log \Xi$ som en potensrekke i z .
- Regn ut det midlere partikkeltallet $N = \sum_{n=0}^{\infty} \langle N_n \rangle$ som en potensrekke i z , der $\langle N_n \rangle_n$ er det midlere antall partikler i énpartikkel-tilstanden n .
- Regn ut den midlere eksitasjonsenergien $\bar{E} = \sum_{n=0}^{\infty} \langle E_n \rangle$ som en potensrekke i z , der $\langle E_n \rangle = n\hbar\omega \langle N_n \rangle$ er den midlere eksitasjonsenergien til partiklene i énpartikkel-tilstanden n .
- Bruk resultatene fra de to foregående punktene til å finne E som funksjon av N til annen orden i N , dvs. bestem koeffisientene C_1 og C_2 i utviklingen

$$E = C_1 N + C_2 N^2 + \dots \quad (3)$$

Anta nå istedet at $\beta\hbar\omega \gg 1$, slik at man kan gjøre tilnærmingen

$$\sinh \frac{1}{2} \beta \hbar \omega \approx \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2} \beta \hbar \omega}. \quad (4)$$

- Regn ut Ξ med denne tilnærmingen.
- Regn ut det midlere partikkeltallet N med denne tilnærmingen.
- Regn ut den midlere energien E med denne tilnærmingen.

Oppgave 3. Python kode

Listing 1: Python code fragments

```

1 def make1DRandomWalkByTossingCoins(nsteps):
2     # Generate a one-dimensional random walk of length 'nsteps' by throwing (virtual) coins
3     randomSteps = numpy.random.randint(0, 2, nsteps)
4     randomWalk = numpy.cumsum(randomSteps-0.5)
5     return randomWalk
6
7 def plot1DRandomWalk(randomWalk):
8     # Plot a one-dimensional random walk as function of discrete time
9     pyplot.plot(randomWalk, 'ob')
10    pyplot.xlabel(r'Discrete_time_$n$')
11    pyplot.ylabel(r'Discrete_position_$X(n)$')
12    pyplot.title(r'A_1-dimensional_random_walk')
13    # pyplot.show()
14    pyplot.savefig("random1DWalk")

```

- Forklar hva som blir gjort i de to Python funksjonene listet over.
- Hvordan vil du ekstrahere endepunktet til `randomWalk`?
- Hvordan vil du ekstrahere det største avviket fra startverdien i `randomWalk`?