

I a)

$\alpha)$ For å fremstille likevekt må $\rho(q,p,t)$ være stasjonær:

$\partial \rho / \partial t = 0$. Det er oppfylt med $\rho = \rho(E)$ som man ser av Liouilles sats.

$\beta)$ Ved sammenfatning av tilnærmet (eller helt) uavhengige systemer er energien additiv:

$$E_{1+2} = E_1 + E_2 + o(N)$$

mens sannsynligheten multiplikativ:

$$\rho_{1+2} = \rho_1 \rho_2 + \text{et v.v.ledd } \rho_{1,2} \text{ som kan sløyfes}$$

Det er oppfylt med $\rho \sim \exp(E)$

I b)

Entropien er også additiv:

$$S_{1+2} = S_1 + S_2 + S_{12}$$

Forsøk en almindelig: $S = S[\rho]$, $\int \rho d\Omega = 1$

$$S_1 = \int f(\rho_1) d\Omega_1, \quad S_2 = \int f(\rho_2) d\Omega_2$$

$$\int \rho_1 d\Omega_1 = 1, \quad \int \rho_2 d\Omega_2 = 1, \quad d\Omega_1 \cdot d\Omega_2 = d\Omega_{1+2}$$

$$S_1 = \int \rho_2 f(\rho_1) d\Omega_{1+2}, \quad S_2 = \int \rho_1 f(\rho_2) d\Omega_{1+2}$$

$$S_{1+2} = \int f(\rho_1 \rho_2) d\Omega_{1+2} = S_1 + S_2 \quad \text{gir da funksjonallikningen}$$

$$\frac{f(\rho_1)}{\rho_1} + \frac{f(\rho_2)}{\rho_2} = \frac{f(\rho_1 \rho_2)}{\rho_1 \rho_2} \quad \therefore f(\rho) = \rho \log \rho.$$

I c)

En infinitesimal reversibel process svarer i ensemblet til en forandring

$$\psi \rightarrow \psi + d\psi, \quad \Theta \rightarrow \Theta + d\Theta,$$

og hvis de mekaniske parametre endres $a \rightarrow a + da$, vil energien for hvert medlem (system) i ensemblet undergå en forandring $E \rightarrow E + dE$, mens fordelingen hele tiden beholder sin kanoniske form og spesielt $\int \rho d\Omega = 1$ forblir konstant. Det gir til 1.orden i små størrelser:

$$0 = \int e^{\frac{\psi - E}{\Theta}} d\Omega \left\{ d\psi - dE - d\Theta \frac{\psi - E}{\Theta} \right\}$$

$$d\psi - \overline{dE}(\text{rev.}) - \overline{\Theta} d\Theta = 0$$

Innsetning av $d(\overline{\Theta}\Theta) = d\overline{E} - d\psi$ gir

$$\Theta d\overline{\Theta} = d\overline{E} - \overline{dE}(\text{rev.}) \quad \text{g.e.d.}$$

II a)

For $T = 0$ går $n(\epsilon)$ mot en plankestubb

$$\bar{n} \rightarrow \begin{cases} 1 & \epsilon \ll \mu_0 \\ 0 & \epsilon \gg \mu_0 \end{cases}$$

$$N = \int_0^{\mu_0} dN(\epsilon) = 4\pi V \left(\frac{2m}{h^2} \right)^{3/2} \int_0^{\mu_0} \epsilon^{1/2} d\epsilon$$

$$= \dots \cdot \frac{2}{3} \mu_0^{3/2} \quad \text{derav}$$

$$\underline{\mu_0 = \frac{h^2}{2m} \left(\frac{3}{8\pi} \frac{N}{V} \right)^{2/3}}$$

II b)

Almindelig er det kjemiske potensial gitt ved

$$N = 4\pi V \cdot \left(\frac{2m}{h^2 \beta} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} \frac{x^{1/2} dx}{e^x - \beta \mu_+ + 1}$$

$$= \frac{3N}{2(\beta \mu_0)^{3/2}} \int \dots$$

For $\mu = 0$ har vi altså:

$$\frac{2}{3} (\beta \mu_0)^{3/2} = 0.67 \left(= \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \zeta(3/2) \right)$$

$$\left(\frac{\mu_0}{kT} \right)^{3/2} = 1.004 \dots$$

$$T = \frac{\mu_0}{k} = \frac{h^2}{2mk} \cdot \left(\frac{3}{8\pi} \frac{N}{V} \right)^{2/3}$$

$$\frac{N}{V} = \frac{\rho}{m} = \frac{0.016}{4.92 \cdot 10^{-24}} = \frac{3.25 \cdot 10^{21}}{1}$$

$$\left(\frac{3}{8\pi} \cdot \frac{N}{V} \right)^{2/3} = 10^{14} \frac{3 \times 3.25}{8\pi}^{2/3} = \frac{0.53 \cdot 10^{14}}{1}$$

$$\frac{h^2}{2mk} = \frac{(6.62)^2 \cdot 10^{-54}}{2 \times 4.92 \cdot 10^{-24} \times 1.38 \cdot 10^{-16}} = \frac{44}{13} \cdot 10^{-14}$$

$$T = \frac{0.53 \times 44}{13} = \underline{1.8^\circ \text{ K}}$$