

Teor. Fysikk IB

Eksamen

STATISTISK

MEKANIKK

11. 12. 1975

Løsningskisse:

Oppgave 1

a)
$$\rho(\vec{p}_1, \dots, \vec{q}_N) = \frac{1}{h^{3N} N!} e^{-\frac{F - H(\vec{p}_1, \dots, \vec{q}_N)}{kT}}$$

Definisjoner av ρ , p_i , q_i , h , N , F , k , T , H .

Ekvipartisjonsprinsippet: Enhvert kvadratisk ledd i Hamiltonfunksjonen har middelværdi $\frac{1}{2}kT$. Den angjeldende koordinat må ikke forekomme i den resterende del av H .

Bevis:
$$\langle \alpha q_1^2 \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha q_1^2 e^{-\alpha q_1^2 / kT} dq_1}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha q_1^2 / kT} dq_1} = \frac{1}{2} kT.$$

b) Den kanoniske sannsynlighetstetthet har følgende z -avhengighet ($\beta = 1/kT$)

$$\rho \propto e^{-(mgz - a \ln z) \beta} = z^{a\beta} e^{-mg\beta z}$$

så sannsynligheten for å finne partikkelen i en avstand mellom z og $z+dz$ er

$$P(z) dz = C z^{a\beta} e^{-mg\beta z} dz,$$

der normaliseringskonstanten C er bestemt av $\int_0^\infty P(z) dz = 1$, D.v.s.

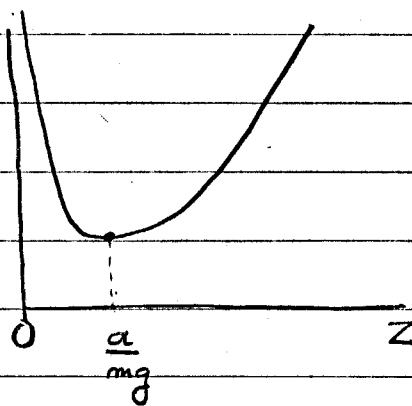
$$C^{-1} = \int_0^\infty z^{a\beta} e^{-mg\beta z} dz = \frac{(a\beta)!}{(mg\beta)^{a\beta+1}}.$$

Middelavstanden fra flate:

$$\begin{aligned}\langle z \rangle &= \int_0^{\infty} z P(z) dz = C \int_0^{\infty} z^{1+a\beta} e^{-mg\beta z} dz \\ &= C \frac{(1+a\beta)!}{(mg\beta)^{a\beta+2}} = \frac{(1+a\beta)!}{(a\beta)! (mg\beta)} = \frac{1+a\beta}{mg\beta} = \underline{\underline{\frac{a+kT}{mg}}},\end{aligned}$$

Økende med T som rimelig er når en ser på
potensialet

$$V(z) = mgz - a \ln z$$



Oppgave 2

Trykket er gitt ved $p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T$ og F ved

$$e^{-F/kT} = Z = \sum_n e^{-E_n/kT} \quad \text{Dvs}$$

$$p = kT \frac{\partial}{\partial V} \ln \sum_n e^{-E_n/kT} = - \frac{\sum_n \frac{\partial E_n}{\partial V} e^{-E_n/kT}}{\sum_n e^{-E_n/kT}}$$

I dette tilfellet er

$$\frac{\partial E_n}{\partial V} = C_n (-a) V^{-a-1} = - \frac{a E_n}{V},$$

$$\text{dvs} \quad p = \frac{a}{V} \frac{\sum_n E_n e^{-E_n/kT}}{\sum_n e^{-E_n/kT}} = a \frac{\langle E \rangle}{V} = a \frac{U}{V} = a \mu$$

$$\underline{\underline{p/\mu = a}}, \quad \text{for ikkerel. punkt p.: } \underline{\underline{a = \frac{2}{3}}}.$$

Oppgave 3

a) Sannsynligheten for å finne besetningsstallene $n_1, n_2, \dots, n_f$

$$\begin{aligned} P(n_1, n_2, \dots) &= e^{(\Omega + \mu N - E)/kT} = e^{\beta(\Omega + \mu \sum_k n_k - \sum_k \epsilon_k n_k)} \\ &= e^{-\beta \Omega} \prod_k [e^{(\mu - \epsilon_k)\beta}]^{n_k} \\ &= [e^{(\mu - \epsilon_i)\beta}]^{n_i} \cdot f, \quad f = \text{uavh. av } n_i \end{aligned}$$

$$P(n_i) = \sum_{n_k \neq n_i} P(n_1, n_2, \dots) = C [e^{(\mu - \epsilon_i)\beta}]^{n_i} = \frac{e^{(\mu - \epsilon_i)\beta n_i}}{1 + e^{(\mu - \epsilon_i)\beta}}$$

ved å bestemme normeringskonstanten C for fermioner ($n_i = 0$ eller 1). Gir

$$\langle n_i \rangle = \sum_{n_i=0}^1 n_i P(n_i) = P(1) = \frac{e^{(\mu - \epsilon_i)\beta}}{1 + e^{(\mu - \epsilon_i)\beta}} = \frac{1}{e^{(\epsilon_i - \mu)\beta} + 1}$$

$$U = \langle E \rangle = \left\langle \sum_i \epsilon_i n_i \right\rangle = \sum_i \frac{\epsilon_i}{e^{(\epsilon_i - \mu)\beta} + 1}$$

$$b) \quad \rho = \frac{1}{V} \langle N \rangle = \frac{1}{V} \sum_i \langle n_i \rangle = \frac{1}{V} \sum_i \frac{1}{e^{(\epsilon_i - \mu)\beta} + 1}$$

$$\rightarrow 4\pi \left(\frac{2m}{h^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{1/2} d\epsilon}{e^{(\epsilon - \mu)/kT} + 1}$$

$$U = \sum_i \frac{\epsilon_i}{e^{(\epsilon_i - \mu)\beta} + 1} \rightarrow 4\pi \left(\frac{2m}{h^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{3/2} d\epsilon}{e^{(\epsilon - \mu)/kT} + 1}$$

Ved $T \rightarrow 0$: $\rho = 4\pi \left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} \int_0^\mu \epsilon^{1/2} d\epsilon = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} \mu^{3/2}$

$$U = \frac{8}{5} \pi \left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} \mu^{5/2} V$$

Midlere partikkelenergi: $\frac{U}{\langle N \rangle} = \frac{U}{V\rho} = \underline{\underline{\frac{3}{5}\mu}}$

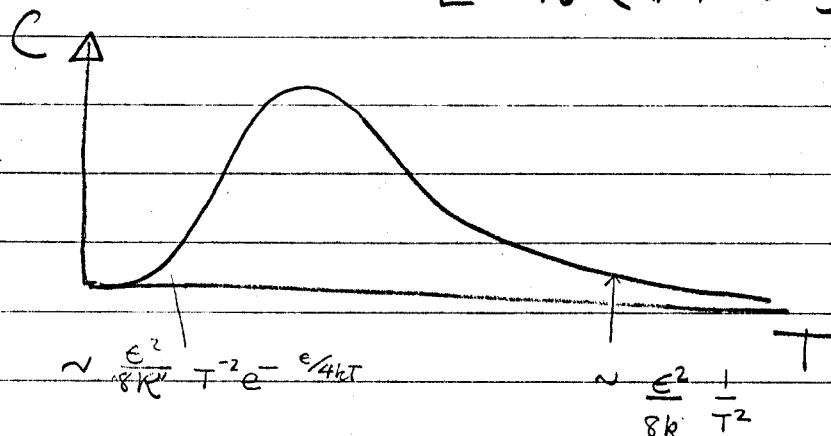
c) $\epsilon_2 = \epsilon$
 $\epsilon_1 = 0$ $U = \langle \epsilon \rangle = \frac{\epsilon}{e^{(\epsilon-\mu)/kT} + 1}$

$$C = \frac{\partial \langle \epsilon \rangle}{\partial T} = \frac{\epsilon e^{(\epsilon-\mu)/kT}}{(e^{(\epsilon-\mu)/kT} + 1)^2} \cdot \frac{(\epsilon-\mu)}{kT^2}$$

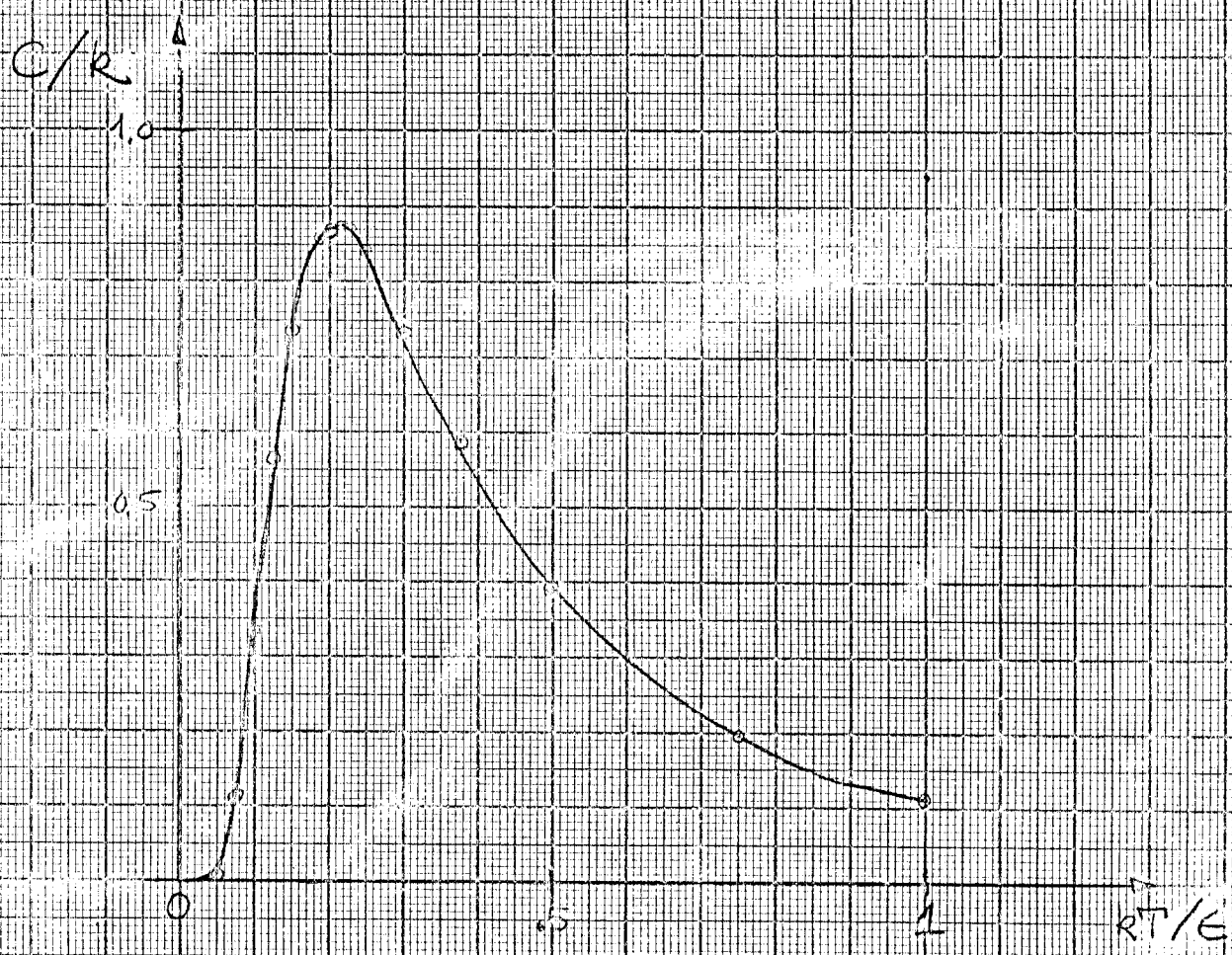
$$= k \cdot \frac{\epsilon(\epsilon-\mu)}{4} \left[\frac{1}{kT \cosh \frac{\epsilon-\mu}{2kT}} \right]^2$$

$\mu = \frac{\epsilon}{2}$:

$$C = 2k \left[\frac{\epsilon/4kT}{\cosh(\epsilon/4kT)} \right]^2$$



Av de asymptotiske forløp ser vi at kurven må ha et maksimum. Presis figur neste side.



(6)

For $\mu > \epsilon$ ser vi at $C < 0$. Årsaken til dette, dvs. at middelen energien avtar med økende T , er at når T øker forvinner partikler fra systemet til omgivelsene.

Alternativ formulering: Når $\mu > \epsilon$ er begge tilstander fullt besatt ved $T=0$; dette gir den maksimale mulige energi i systemet. Ved økende T kan energien bare avta, $\therefore C < 0$.