

Oppgave 1. Løsning

a) Hamiltonfunksjonen for systemet er

$$H = \sum_{i=1}^N \left(\frac{p_i^2}{2m} + mgz_i \right) = \sum_{i=1}^N H_i$$

Sannsynlighetsfordelingen er

$$\rho = C e^{\beta(F-H)} = C_0 e^{-\beta H},$$

der vi har sett $C_0 = C e^{-\beta F}$.

Den søkte fordelinga for partikkel nr. 1, er:

$$\begin{aligned} \underline{P(\vec{r}_1, \vec{p}_1)} &= \int \rho d^3r_2 \cdots d^3r_N \cdot d^3p_2 \cdots d^3p_N \\ &= e^{-\beta H_1} C_0 \int e^{-\sum_{i=2}^N H_i} d^3r_2 \cdots d^3r_N d^3p_2 \cdots d^3p_N \\ &= C_1 e^{-\beta H_1} = \underline{\underline{C_1 e^{-\beta \left(\frac{p_1^2}{2m} + mgz_1 \right)}}} \end{aligned}$$

b)

Vi har

$$\begin{aligned} P(\vec{p}_1) d^3p_1 &= d^3p_1 \cdot \int P(\vec{r}_1, \vec{p}_1) d^3r_1 \\ &= C_2' e^{-\beta \frac{p_1^2}{2m}} d^3p_1 = C_2' e^{-\beta \frac{1}{2} m v_1^2} m^3 dv_1^3 \end{aligned}$$

$$= C_2 e^{-\beta \frac{1}{2} m v_1^2} d^3 v_1 = P(\vec{v}_1) d^3 v_1$$

2.

Also, er

$$\underline{\underline{P(\vec{v}_1) = C_2 e^{-\beta \frac{1}{2} m v_1^2}}}$$

c)

$$\begin{aligned} \underline{\underline{P(z_1)}} &= \int P(\vec{r}_1, \vec{p}_1) d^3 p_1 dx_1 dy_1 \\ &= \underline{\underline{C_3 e^{-\beta m g z_1}}} \end{aligned}$$

Via ma' ha

$$\begin{aligned} \int_0^h P(z_1) dz_1 &= C_3 \int_0^h e^{-\beta m g z_1} dz_1 \\ &= C_3 \cdot \frac{1 - e^{-\beta m g h}}{\beta m g} = 1 \end{aligned}$$

Dalle qui

$$\underline{\underline{C_3 = \frac{\beta m g}{1 - e^{-\beta m g h}}}}}$$

Oppgave 2. Løsning.

Sannsynlighetsfordelingene for de to konfigurasjonene er

$$P_1 = e^{\beta F} \frac{1}{h^3} e^{-\beta \frac{p^2}{2m}}$$

og

$$P_2 = e^{\beta F} \frac{1}{h^6} e^{-\beta \left(\frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + U \right)}$$

Her er F Helmholtz fri energi for systemet. F er bestemt av normeringskravet:

$$\int P_1 d^3r d^3p + \int P_2 d^3r_1 d^3r_2 d^3p_1 d^3p_2 = 1$$

a)

Sannsynligheten for at systemet skal vera i konfigurasjonen 1 og i elementet $d^3r d^3p$ er da like $P_1 d^3r d^3p$. Sannsynligheten for at systemet skal vera i konfigurasjonen 1 finn vi nå ved å integrere ut $\vec{r}$ og $\vec{p}$ koordinatane.

Altså:

$$\begin{aligned}\underline{P_m} &= \int P_1 d^3r d^3p = \int P_1 dx dy dz dp_x dp_y dp_z \\ &= \underline{\underline{C \frac{1}{h^3} V (2\pi m kT)^{3/2}}}\end{aligned}$$

Her er $C = \exp(\beta F)$.

b) Tilsvarende får vi

$$\begin{aligned}\underline{P_d} &= \int P_2 d^3r_1 d^3r_2 d^3p_1 d^3p_2 \\ &= \underline{\underline{C \frac{1}{h^6} V^2 (2\pi m kT)^{3/2} (2\pi M kT)^{3/2} e^{-\frac{\mu}{kT}}}}\end{aligned}$$

Det følger

$$\underline{\underline{\alpha = \frac{P_m}{P_d} = \frac{h^3 e^{\frac{\mu}{kT}}}{(2\pi m kT)^{3/2} V}}} \quad (1)$$

c)

Når V er liten og $\mu/kT \gg 1$, er eksponentialfaktoren dominerende, slik at $\alpha \gg 1$. Det følger at
atomet er udissoasert

d)

Når $V \rightarrow \infty$ vil, for endelig u_{kt} ,
 $\alpha \rightarrow 0$. Det følger at atomet
da er dissosiert.

Dersom sannsynligheten per tidsintervall
 for rekombinasjon av ionet og elektronet
 er vesentlig mindre enn sannsynlig-
 heten per tidsintervall for ionisasjon, vil
 atomet stort sett vera dissosiert.

Ionisasjonen skjer ved kollisjon
 med ryggene, der atomet har
 ein viss sannsynlighet for å
 dissosiera.

Føresetningen for at ionet og
 elektronet skal rekombinera
 er mellom anna at dei kjem
 nær nok kvarandre. Dersom volumet
 er stort nok vil elektronet og ionet
 ha liten sannsynlighet for å møtest.
 Atomet vil derfor bli i sin
 dissosierte tilstand.

e)

Formelen (1) for d gjeld for
 ein partikkel i eit volum V .
 Kvalitativt bør vi kunna gjera
 bruk av (1) også for fleire partiklar
 i den forstand at
 forholdet mellom udissoiserte og
 dissoiserte partiklar minskar
 med aukande T og aukande volum
 per partikkel (mindre tetthet).

I koronaen er tettheten og
 temperaturen begge relativt små.
 Desse faktorene trekkur då i kvar sin
 retning, men reduksjonen i tettheten
 mest. Difor bli det relativt fleire
 dissoiserte partiklar i koronaen
 enn i dei andre delar av sola.

Oppgave 3. Løsning

7.

a)

$$\frac{n_2 = N - n_1}{\quad} \quad \epsilon_2 = \epsilon$$

$$\frac{n_1}{\quad} \quad \epsilon_1 = 0$$

La oss anta at det er n_1 partikler i grunntilstandene. Da må det vera $n_2 = N - n_1$ partikler i den eksiterte tilstanden.

Energien til systemet er

$$E_m = n_2 \epsilon = (N - n_1) \epsilon = E_{n_1}$$

Partisjonsfunksjonen er

$$\begin{aligned} Z &= \sum_m e^{-\beta E_m} = \sum_{n_1=0}^N e^{-\beta (N - n_1) \epsilon} \\ &= \sum_{n_1=0}^N q^{N - n_1} \end{aligned}$$

Vi set $m = N - n_1$, og får

$$Z = \sum_{m=0}^N q^m = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}$$

Derive z

$$\underline{\underline{p(m_1) = \frac{e^{-\beta(N-m_1)}}{Z} = \frac{q^{(N-m_1)}(1-q)}{1-q^{N+1}}}}$$

b) Det middels beregnes tolet er

$$\begin{aligned} \langle m_1 \rangle &= \sum_{m_1=0}^N p(m_1) \cdot m_1 = \sum_{m_1=0}^N \frac{q^{N-m_1} (1-q) \cdot m_1}{1-q^{N+1}} \\ &= \frac{1-q}{1-q^{N+1}} \sum_{m_1=0}^N m_1 q^{N-m_1} = \frac{1}{Z} \sum_{m=0}^N (N-m) q^m \\ &= \frac{1}{Z} \left(N Z - \sum_{m=0}^N m q^m \right) \quad (1) \end{aligned}$$

Såfremt ledet i parentes kan vi skrive

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^N m q^m &= \sum_{m=0}^N [(m+1) q^m - q^m] \\ &= \frac{\partial}{\partial q} \sum_{m=0}^N q^{m+1} - \sum_{m=0}^N q^m \\ &= \frac{\partial}{\partial q} \frac{1-q^{N+1}}{1-q} q - \frac{1-q^{N+1}}{1-q} \\ &= q \frac{1-q^{N+1}}{(1-q)^2} - \frac{(N+1) q^{N+1}}{1-q} \end{aligned}$$

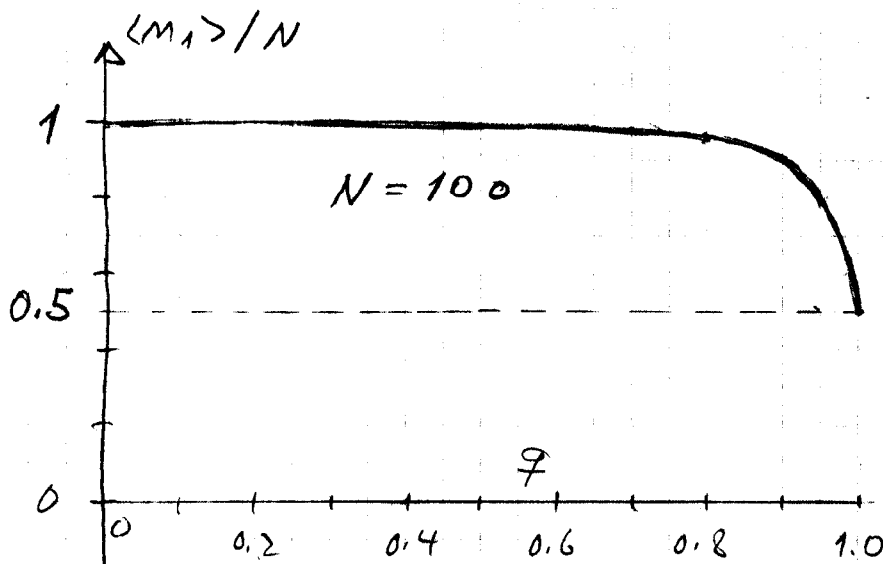
Insert (1) in (2)

$$\langle M_1 \rangle = N - \frac{q}{1-q} + (N+1) \frac{q^{N+1}}{1-q^{N+1}} \quad (3)$$

$$= -\frac{1}{1-q} + \frac{N+1}{1-q^{N+1}} = \frac{q^{N+1} + N - Nq - q}{(1-q)(1-q^{N+1})}$$

c)

$$\frac{\langle M_1 \rangle}{N} = 1 - \frac{1}{N} \frac{q}{1-q} + \frac{N+1}{N} \frac{q^{N+1}}{1-q^{N+1}}$$



d) V_1 has

$$\underline{U} = \langle M_2 \rangle \varepsilon = \underline{(N - \langle M_1 \rangle) \varepsilon} \quad (4)$$

V_1 set $n=0$ $N=1$ in (3) of form

$$\langle M_1 \rangle = \frac{1}{1+q}$$

Likening (4) ger:

$$U = \left(1 - \frac{1}{1+q}\right) \varepsilon = \varepsilon \frac{q}{1+q} = \varepsilon \frac{e^{-\varepsilon/kT}}{1 + e^{-\varepsilon/kT}}$$

Da er

$$\underline{\underline{C_V = \frac{\partial U}{\partial T} = k \left(\frac{\varepsilon}{kT}\right)^2 \frac{e^{-\varepsilon/kT}}{(1 + e^{-\varepsilon/kT})^2}}}$$