

Oppgave 1

- i) Fysisk betydning: $n_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2; T, V, N) d^3r_1 d^3r_2$ er sannsynligheten for å finne en partikkel i d^3r_1 omkring $\vec{r}_1$ og samtidig en partikkel i d^3r_2 omkring $\vec{r}_2$ i et system av N partikler i et volum V i likevekt ved temperaturen T .

ii)

Svar:

$$n_2 = \frac{N(N-1)}{V^2} \frac{\int_V e^{-U/kT} d^3r_1 \dots d^3r_N}{\int_V e^{-U/kT} d^3r_1 \dots d^3r_N}, \quad U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \text{pot. energi.}$$

iii)

$$n_2^{\text{ideell gass}} = \frac{N(N-1)}{V^2} \quad \text{av ovenstående med } U=0, \text{ dvs direkte.}$$

iv)

For et kanonisk ensemble som har en makroskopiske (termodynamiske) grense: $V \rightarrow \infty, N \rightarrow \infty, N/V = \text{endelig} = \text{antalltettheten } \rho$.

v)

"irreducibel" for grafene betyr ^{her} at om rotpunktene forbindes er grafen en stykke, dvs at den ikke kan deles i to uansatte deler ved å fjerne ett punkt.

vi)

$$\bar{n}_2(r_{12}) = 0 + \text{diagrams} + \mathcal{O}(\rho^5)$$

vii)

Til laveste orden er $\bar{n}_2(r) = \rho^2 + \rho^2 f(r)$, $f(r) = e^{-\beta \varphi(r)} - 1$, og det er tilnærmet riktig.

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T = kT \left[1 + \rho \int f(r) d^3r\right]^{-1} = kT (1 - \rho \int f(r) d^3r) + \mathcal{O}(\rho^2).$$

$$\therefore p = kT \rho - \frac{1}{2} kT \rho^2 \int f(r) d^3r + \mathcal{O}(\rho^3)$$

Virialtettermet gir

$$p = kT \rho - \frac{1}{6} \rho^2 \int_0^\infty 4\pi r^2 dr \, r \varphi'(r) e^{-\beta \varphi(r)} = kT \rho + \frac{1}{6} kT \rho^2 4\pi \int_0^\infty dr \, r^3 \frac{d}{dr} \left[\frac{e^{-\beta \varphi(r)} - 1}{f(r)} \right] = kT \rho - \frac{1}{2} kT \rho^2 \int_0^\infty dr \, r^2 \varphi(r)$$

$$\frac{I(\vec{r})}{I_0(\vec{r})} = 1 + \frac{1}{\rho} \int d\vec{r}' e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}'} G(r), \quad G(r) \equiv \bar{n}_2(r) - \rho^2.$$

$$k = \frac{4\pi}{\lambda} \sin \frac{\gamma}{2}$$

(ix) For langsomme nøytroner må en ta hensyn til avhengigheten til korrelasjonene. $G(r)$ beskriver stedskorrelasjoner til samme tidspunkt, og ovenstående utledning forutsetter foton/nøytron-hastighet $\gg$ Stoffets termiske hastigheter.

(x) For store λ er $k \approx 0$, og

$$\frac{I(\vec{r})}{I_0(\vec{r})} \approx 1 + \frac{1}{\rho} \int d\vec{r}' G(r) = \frac{kT}{(\partial \rho / \partial p)_T}$$

eller fluktuasjonsformelen. Og $(\partial \rho / \partial p)_T \rightarrow 0$ ved det kritiske punkt!

Oppgave 2.

a) For $t \rightarrow 0^+$ vil $M \rightarrow r \ell^{a-s} t^{-b+su}$ som eksisterer bare for $b=su$.

For $\ell \rightarrow 0$ (og $t > 0$) vil $M \rightarrow r \ell^{a+s} t^{-b-su}$ og

$$\chi_T = \left(\frac{\partial M}{\partial \ell} \right)_T \rightarrow (a+s) r \ell^{a+s-1} t^{-b-su}$$

eksisterer bare om $\underline{a+s-1=0}$. Dvs.

$$\begin{aligned} s &= 1-a \\ \mu &= b/(1-a) \end{aligned}$$

Kritiske indekser:

Av dette følger $M \propto \ell^{a-s} = \ell^{2a-1}$ ($t \rightarrow 0$) og

$$\ell(t \rightarrow 0) \propto M^{\frac{1}{2a-1}} \quad \therefore \underline{\underline{\gamma = \frac{1}{2a-1}}}$$

Videre

$$\chi_T(\ell \rightarrow 0) \sim |\ell|^{-b-su} = |\ell|^{-2b} \quad \therefore \underline{\underline{\gamma' = 2b}}$$

For $t < 0$ og $\ell \rightarrow 0$ er $M \sim |\ell|^c \quad \therefore \underline{\underline{\beta = c}}$

med en trykning af kombinasjonen af $|t|$ er kombinasjonen
 x . Ved å sette $x = |t|^{1-a} \cdot x$ inn for x fås

$$M |t|^{-c} = \begin{cases} g + 2x^a |t|^{-b-c+au} e^{-\sqrt{u^2 x + v^2}} & t < 0 \\ 2x^a |t|^{-b-c+au} e^{-\sqrt{u^2 x + v^2}} & t > 0 \end{cases}$$

Høyre side er en funksjon av x alene om

$$c = au - b = \frac{ab}{1-a} - b = \frac{2a-1}{1-a} b,$$

og venstre side er en kombinasjon av M og $|t|$ alene

$$y = M |t|^{-c}.$$

c) Det er fristatt at

$$G = |t|^{\frac{2ab}{1-a}} g(x |t|^{-\frac{b}{1-a}}).$$

$$\begin{aligned} C_x = -T \left(\frac{\partial^2 G}{\partial |t|^2} \right)_x &= -T \left\{ |t|^{\frac{2ab}{1-a}-2} \cdot \frac{2ab}{1-a} \cdot \left(\frac{2ab}{1-a} - 1 \right) g() \right. \\ &\quad + 2 \frac{2ab}{1-a} \cdot \frac{-b}{1-a} \cdot x |t|^{\frac{2ab}{1-a}b-2} g'() \\ &\quad + \frac{b}{1-a} \left(\frac{b}{1-a} + 1 \right) x |t|^{-\frac{2a-1}{1-a}-2} g'() \\ &\quad \left. + \left(\frac{b}{1-a} \right)^2 x^2 |t|^{-\frac{2a-2}{1-a}b-2} g''() \right\} \end{aligned}$$

$$C_{x \rightarrow 0} \rightarrow -T \cdot \frac{2ab}{1-a} \cdot \left(\frac{2ab}{1-a} - 1 \right) g(0) |t|^{\frac{2ab}{1-a}-2}$$

$$\therefore \boxed{\alpha = \alpha' = 2 - \frac{2ab}{1-a}}$$