

# Fasit Eksamen TFY 4230

## Statistisk Fysikk Hausten 2005

December 10, 2005

### Oppgave 1

a) Marginalfordelinga  $P(p)$  er

$$P(p) = c \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(E - H)$$

Integrasjon gir

$$P(p) = \frac{2c}{V_0},$$

der ein har brukt at  $\delta(a - bx) = \frac{1}{b}\delta(a/b - x)$  og at  $P(p, x)$  har to nullpkt. pga absoluttverdien som inngår i  $H$ . Normaliseringskravet gir

$$\begin{aligned} 1 &= \int P(p) dp \\ &= \frac{2c}{V_0} \int_{-\sqrt{2mE}}^{\sqrt{2mE}} dp \\ &= \frac{4c\sqrt{2mE}}{V_0}. \end{aligned}$$

Dette gir

$$c = \frac{V_0}{\underline{\underline{4\sqrt{2mE}}}}$$

og dermed den normaliserte fordelinga

$$P(p) = \frac{1}{\underline{\underline{2\sqrt{2mE}}}}.$$

b) Vi har

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{2mE}} \int_{-\sqrt{2mE}}^{\sqrt{2mE}} \frac{p^2}{2m} dp \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{3}E}}\end{aligned}$$

c) Partisjonsfunksjonen er

$$\begin{aligned}Z &= \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-\beta H} \\ &= \underline{\underline{\sqrt{\frac{2\pi m k_B T}{h^2}} \frac{2k_B T}{V_0}}}\end{aligned}$$

d) Midlere energi er

$$\begin{aligned}E &= -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \\ &= \underline{\underline{\frac{3}{2}k_B T}}\end{aligned}$$

## Oppgave 2

a) Det finst 8 moglege spinnkonfigurasjonar:

$$\underline{\underline{(\uparrow\uparrow\downarrow)}}, \underline{\underline{(\downarrow\downarrow\uparrow)}}, \underline{\underline{(\uparrow\uparrow\uparrow)}}, \underline{\underline{(\uparrow\downarrow\uparrow)}}, \underline{\underline{(\downarrow\uparrow\downarrow)}}, \underline{\underline{(\downarrow\downarrow\downarrow)}}, \underline{\underline{(\downarrow\uparrow\uparrow)}}, \underline{\underline{(\uparrow\downarrow\downarrow)}},$$

Dei tilhøyrande energiane er

$$\underline{\underline{\epsilon_1 = -2J}}, \underline{\underline{\epsilon_2 = -2J}}, \underline{\underline{\epsilon_3 = 0}}, \underline{\underline{\epsilon_4 = 0}}, \underline{\underline{\epsilon_5 = 0}}, \underline{\underline{\epsilon_6 = 0}}, \underline{\underline{\epsilon_7 = 2J}}, \underline{\underline{\epsilon_8 = 2J}}$$

b) Vi har

$$\begin{aligned}Z &= \sum_{i=1}^8 e^{-\beta \epsilon_i} \\ &= 4 + 2e^{2\beta J} + 2e^{-2\beta J} \\ &= \underline{\underline{8 \cosh^2(\beta J)}}$$

c) Midlere energi

$$\begin{aligned}E &= -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \\ &= \underline{\underline{-2J \tanh \beta J}}\end{aligned}$$

Grensa  $T \rightarrow 0$  gir

$$\lim_{T \rightarrow 0} E = \underline{\underline{-2J}}$$

Tolkning: Ved  $T = 0$  er systemet i grunntilstanden som har energi  $-2J$ .

d) Korrelasjonsfunksjonen er

$$\begin{aligned}\langle s_1 s_3 \rangle &= \frac{1}{Z} \sum_{s_i = \pm 1} (s_1 s_2)(s_2 s_3) e^{\beta J(s_1 s_2 - s_2 s_3)} \\ &= \underline{\underline{-\tanh^2(\beta J)}}$$

Vidare har vi

$$\lim_{T \rightarrow 0} \langle s_1 s_3 \rangle = \underline{\underline{-1}}$$

Tolkning: For  $T = 0$  er systemet i grunntilstanden. I grunntilstanden peiker  $s_1$  opp og  $s_3$  ned eller omvendt. Dette impliserer  $\langle s_1 s_3 \rangle = -1$ .

### Oppgave 3

a) Vi har

$$\begin{aligned}\epsilon &= \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} n_x^2 \\ &= \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} R^2 ,\end{aligned}$$

der  $n_x = 0, 1, 2, \dots$  Antall tilstandar med energi mindre enn  $\epsilon$ :

$$\begin{aligned}\Phi(\epsilon) &= R \\ &= 2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}} L \epsilon^{1/2} .\end{aligned}$$

Derav følger

$$\begin{aligned}g(\epsilon) &= \frac{d\Phi}{d\epsilon} \\ &= \underline{\underline{\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}} L \epsilon^{-1/2}}} .\end{aligned}$$

b) Tettheten er

$$\begin{aligned}\rho &= \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}} \int_0^\infty \theta(\mu - \epsilon) \epsilon^{-1/2} d\epsilon \\ &= \underline{\underline{2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}} \epsilon_F^{1/2}}}\end{aligned}$$

Den indre energien er

$$\begin{aligned}U &= \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}} L \int_0^\infty \theta(\mu - \epsilon) \epsilon^{1/2} d\epsilon \\ &= \underline{\underline{\frac{2}{3} \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}} L \epsilon_F^{3/2}}}\end{aligned}$$

Her har ein brukt at FD fordelingsfunksjonen blir ein Heaviside step funksjon i grensa  $T \rightarrow 0$ . Trykket er

$$\frac{P}{k_B T} = \sqrt{\frac{2m}{h^2}} \int_0^\infty \ln[1 + e^{-\beta(\epsilon - \mu)}] \epsilon^{-1/2} d\epsilon$$

Delvis integrasjon gir da

$$P = 2\sqrt{\frac{2m}{h^2}} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{1/2}}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} + 1} d\epsilon$$

Dette gir i grensa  $T = 0$ :

$$P = 2\sqrt{\frac{2m}{h^2}} \int_0^\infty \theta(\mu - \epsilon) \epsilon^{1/2} d\epsilon$$

$$\underline{\underline{\frac{4}{3} \sqrt{\frac{2m}{h^2}} \epsilon_F^{3/2}}}$$

Vi har her brukt at  $\mu = \epsilon_F$  ved  $T = 0$ .

c) Vi har

$$\epsilon_F = \frac{1}{4} \frac{h^2}{2m} \rho^2 .$$

Innsett i uttrykket for  $P$  får vi

$$P = \underline{\underline{\frac{1}{6} \frac{h^2}{2m} \rho^3}}$$

d) Dette er ein konsekvens av Pauliprinsippet som impliserer at alle tilstandane opp til  $\epsilon_F$  er besatt.

## Oppgave 4

a) Andre virialkoeffisienten er

$$B_2(T) = \frac{1}{2} \int d^3x \left[ 1 - e^{-\beta\phi(x)} \right] .$$

Boyletemperaturen er definert ved

$$B_2(T^*) = 0 .$$

b) Ekvipartisjonsprinsippet seier at kvart kvadratisk ledd i Hamiltonfunksjonen gir eit bidrag  $\frac{1}{2}k_B T$  til den midlere energien og dermed  $\frac{1}{2}k_B$  til varmekapasiteten.

c) Ved lave temperaturar går varmekapasiteten som  $T^3$  og for høge temperaturar gjeld ekvipartisjonsprinsippet og varmekapasiteten er konstant.

d) Det er klassiske forhold dersom

$$\Lambda^3 \rho \ll 1 ,$$

der  $\rho$  er tettheiten og  $\Lambda$  er den termiske bølgelengda.