

Fasit Eksamen TFY 4230 Statistisk Fysikk August 2006

December 19, 2008

Oppgave 1

Marginalfordelinga $P(x)$ er

$$P(x) = c \int_{-\infty}^{\infty} dp \delta(E - H(p, x)) .$$

Integrasjon gjev

$$P(x) = \frac{2mc}{\sqrt{2m(E - V_0|x|)}} ,$$

der ein har brukt at

$$\delta(f(x)) = \sum_{x^*} \frac{1}{|f'(x^*)|} \delta(x - x^*) ,$$

der x^* er nullpunkta til funksjonen $f(x) = E - p^2/2m - V_0|x|$. I dette tilfellet er det to nullpunkt pga absoluttverdien som inngår i H . Normeringskravet gjev

$$\begin{aligned} 1 &= \int P(x) dx \\ &= 2mc \int_{-E/V_0}^{E/V_0} \frac{dx}{\sqrt{2m(E - V_0|x|)}} \\ &= \frac{4c\sqrt{2mE}}{V_0} . \end{aligned}$$

Dette gjev

$$c = \frac{V_0}{4\sqrt{2mE}} ,$$

og dermed den normerte fordelinga

$$P(x) = \frac{mV_0}{2\sqrt{2mE}} \frac{1}{\sqrt{2m(E - V_0|x|)}}$$

b) Vi har

$$\begin{aligned} \langle V_0|x| \rangle &= \frac{mV_0^2}{\sqrt{2mE}} \int_{-E/V_0}^{E/V_0} \frac{|x|dx}{\sqrt{2m(E - V_0|x|)}} \\ &= \underline{\underline{\frac{2}{3}E}} . \end{aligned}$$

c) Partisjonsfunksjonen er

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-\beta H} \\ &= \underline{\underline{\sqrt{\frac{2\pi mk_B T}{h^2}} \frac{2k_B T}{V_0}}} . \end{aligned}$$

d) Fluktuasjonane er

$$\begin{aligned} (\Delta E)^2 &= -\frac{\partial \langle E \rangle}{\partial \beta} \\ &= \underline{\underline{\frac{3}{2}(k_B T)^2}} . \end{aligned}$$

Oppgave 2

a) Det finst 8 moglege spinnkonfigurasjonar

$$\underline{\underline{(\uparrow\downarrow\uparrow), (\downarrow\uparrow\downarrow), (\uparrow\uparrow\downarrow), (\downarrow\downarrow\uparrow), (\downarrow\uparrow\uparrow), (\uparrow\downarrow\downarrow), (\uparrow\uparrow\uparrow), (\downarrow\downarrow\downarrow)}} .$$

Dei tilhøyrande energiane er

$$\epsilon_1 = \underline{\underline{-2J}}, \epsilon_2 = \underline{\underline{-2J}}, \epsilon_3 = \underline{0}, \epsilon_4 = \underline{0}, \epsilon_5 = \underline{0}, \epsilon_6 = \underline{0}, \epsilon_7 = \underline{\underline{-2J}}, \epsilon_8 = \underline{\underline{-2J}},$$

b) Vi har

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{i=1}^8 e^{-\beta \epsilon_i} \\ &= 4 + 2e^{2\beta J} + 2e^{-2\beta J} \\ &= \underline{\underline{8 \cosh^2(\beta J)}} . \end{aligned}$$

Midlere energi

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \\ &= \underline{\underline{-2 \tanh(\beta J)}} . \end{aligned}$$

Grensa $T \rightarrow \infty$:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \langle E \rangle = \underline{\underline{0}}.$$

Tolkning: Når $T \rightarrow \infty$ er sannsyna den same for at systemet er i ein gitt tilstand, i.e. $1/8$. Midlere energi er difor $(-2J - 2J + 0 + 0 + 0 + 0 + 2J + 2J)/8 = 0$.

d) Korrelasjonsfunksjonen er

$$\begin{aligned} \langle s_1 s_2 \rangle &= \frac{1}{Z} \sum_{s_i = \pm 1} s_1 s_2 e^{\beta J (s_1 s_2 + s_2 s_3)} \\ &= \underline{\underline{-\tanh(\beta J)}}. \end{aligned}$$

Vidare har vi

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \langle s_1 s_2 \rangle = \underline{\underline{0}}.$$

Tolkning: For $T \rightarrow \infty$ er alle tilstandar like sannsynlege. Altså er systemet ukorrelert og korrelasjonsfunksjonen er null.

Oppgave 3

a) Energien til ein partikkel kan uttrykkast ved dei to kvantetalla n_x and n_y :

$$\epsilon = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} (n_x^2 + n_y^2).$$

Antal tilstandar $\Phi(\epsilon)$ med energi mindre enn ϵ er lik arealet av den delen av sirkelen som ligg i første kvadrant med radius $R = \sqrt{n_x^2 + n_y^2}$, altså

$$\begin{aligned} \Phi(\epsilon) &= \frac{1}{4} \pi R^2 \\ &= \frac{1}{4} \pi (n_x^2 + n_y^2) \\ &= \frac{2\pi mV}{h^2}. \end{aligned}$$

Derivasjon med omsyn på ϵ gjev tettleiken av tilstandar:

$$g(\epsilon) = \underline{\underline{\frac{2\pi mV}{h^2}}},$$

b) Tetttheiten er

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{2m\pi}{h^2} \int_0^\infty \theta(\mu - \epsilon) d\epsilon \\ &= \underline{\underline{\frac{2m\pi}{h^2} \epsilon_F}}. \end{aligned}$$

Den indre energien er

$$\begin{aligned}\langle E \rangle &= \frac{2m\pi}{h^2} V \int_0^\infty \theta(\mu - \epsilon) \epsilon d\epsilon \\ &= \frac{m\pi}{h^2} V \epsilon_F^2 .\end{aligned}$$

Her har vi brukt at FD fordelingsfunksjonen blir ein stepfunksjon i grensa $T \rightarrow 0$. Trykket blir

$$\frac{P}{k_B T} = \frac{2m\pi}{h^2} \int_0^\infty \ln[1 + e^{-\beta(\epsilon - \mu)}] d\epsilon .$$

Delvis integrasjon gjev

$$P = \frac{2m\pi}{h^2} \int_0^\infty \frac{\epsilon}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} + 1} d\epsilon .$$

I grensa $T = 0$ gjev dette

$$\begin{aligned}P &= \frac{2m\pi}{h^2} \int_0^\infty \epsilon \theta(\mu - \epsilon) d\epsilon \\ &= \frac{m\pi}{h^2} \epsilon_F^2 .\end{aligned}$$

c) Vi har

$$\epsilon_F = \rho \frac{h^2}{2m\pi} .$$

Innsett i uttrykket for P får vi

$$P = \frac{h^2}{4m\pi} \rho^2 .$$

d) Dette er ein konsekvens av Pauliprinsippet som impliserer at alle tilstandane opp til ϵ_F er besatt.

Oppgave 4

a) Dersom temperaturen til ein ideell Bosegass blir så låg at den termiske bølgjelengda $\Lambda \sim \rho^{-1/3}$ byrjar kvanteeffektar å bli viktige. Partiklane kondenserer ned i lågaste einpartikkeltilstand på ein nokså brå måte. Vi har

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{\frac{3}{2}} .$$

b) Ein rekkjeutviklar trykket til ein reell gass i potensar av tettheiten. Viss tettheiten er låg, ventar ein små avvik frå ideell gasslov. Altså:

$$\frac{P}{k_B T} = \rho + B_2(T)\rho^2 + B_3(T)\rho^3 + \dots ,$$

der $B_n(T)$ er nte virialkoeffisient. Desse koeffisientane kan reknast ut dersom ein kjenner vekselverknaden mellom partiklane. I praksis må ein gjere visse tilnærmingar for å kunne rekne ut korreksjonane til ideell gasslov.

c) Ekvipartisjonsprinsippet seier at kvart kvadratisk ledd i Hamiltonfunksjonen gjev eit bidrag $\frac{1}{2}k_B T$ til partisjonsfunksjonen. Det er fire kvadratiske ledd i H , slik at $C_V = 2k_B$.

d) Desse er temperaturen T , det kjemiske potensialet μ og volumet V .