

Fasit Eksamen TFY 4230 Statistisk Fysikk 5. desember 2006

December 19, 2008

Oppgave 1

a) Normalisering av sannsynsfordelinga

$$I = c \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(E - H) = 1 .$$

Vi definerer

$$f(x) = \frac{p^2}{2m} + V_0 \sqrt{|x|} - E ,$$

som gjev

$$|f'(x)| = \frac{V_0}{2\sqrt{|x|}} .$$

Nullpunkta x^* til $f(x)$ er

$$x^* = \pm \frac{1}{V_0^2} \left(E - \frac{p^2}{2m} \right)^2 .$$

Dette gjev da

$$\frac{1}{|f'(x^*)|} = \frac{2}{V_0^2} \left(E - \frac{p^2}{2m} \right) .$$

Ein bruker nå at

$$\delta(f(x)) = \sum_{x^*} \frac{1}{|f'(x^*)|} \delta(x - x^*) ,$$

der x^* er nullpunktene til $f(x)$. Dette gjev

$$\begin{aligned} I &= \frac{4}{V_0^2} \int_{-\sqrt{2mE}}^{\sqrt{2mE}} \left(E - \frac{p^2}{2m} \right)^2 dp, \\ &= \frac{16c}{3V_0^2} E \sqrt{2mE}. \end{aligned}$$

Dette gjev

$$c = \frac{3V_0^2}{\underline{\underline{16E\sqrt{2mE}}}}$$

og dermed den normaliserte fordelinga

$$P(p) = \frac{3}{\underline{\underline{4E\sqrt{2mE}}}} \left(E - \frac{p^2}{2m} \right).$$

b) Vi har

$$\left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle = \int_{-\sqrt{2mE}}^{\sqrt{2mE}} \frac{p^2}{2m} P(p) dp.$$

Integrasjon gjev

$$\left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle = \underline{\underline{\frac{1}{5}E}}.$$

Vi har

$$\langle H \rangle = E.$$

Dette gjev

$$\langle V_0 \sqrt{|x|} \rangle = E - \left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle.$$

Dette gjev

$$\langle \sqrt{|x|} \rangle = \underline{\underline{\frac{4E}{5V_0}}}.$$

c) Partisjonsfunksjonen er

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-\beta H} \\ &= \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta V_0 \sqrt{|x|}} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta p^2/2m} dp \\ &= \sqrt{\frac{2\pi m k_B T}{h^2}} \frac{4}{(\beta V_0)^2} \int_0^{\infty} y e^{-y} dy \\ &= \underline{\underline{\sqrt{\frac{2\pi m k_B T}{h^2}} \frac{4}{(\beta V_0)^2}}}. \end{aligned}$$

d) Middelverdien er

$$\begin{aligned}\langle \sqrt{|x|} \rangle &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{|x|} dx \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-\beta H}}{\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-\beta H}} \\ &= -\frac{1}{\beta Z} \frac{\partial Z}{\partial V_0} \\ &= \frac{2}{\underline{\underline{\beta V_0}}}.\end{aligned}$$

Dette gjev

$$\langle V_0 \sqrt{|x|} \rangle = 2k_B T.$$

Midlere energi er

$$\begin{aligned}\langle E \rangle &= -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \\ &= \frac{5}{2} k_B T.\end{aligned}$$

Dette gjev

$$\langle \sqrt{|x|} \rangle = \frac{4E}{\underline{\underline{5V_0}}}.$$

Same som i punkt b)!

Oppgave 2

a) Den storkanoniske partisjonsfunksjonen er

$$\begin{aligned}\Theta &= \sum_{N=0}^{\infty} e^{\beta \mu N} Z_N \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} [2e^{\beta \mu} \cosh(\beta \epsilon_0)]^N\end{aligned}$$

Dette er ei geometrisk rekke og summen er

$$\Theta = \frac{1}{\underline{\underline{1 - 2e^{\beta \mu} \cosh(\beta \epsilon_0)}}}.$$

b) Partikkeltalet er

$$\begin{aligned}\langle N \rangle &= k_B T \frac{\partial \ln \Theta}{\partial \mu} \\ &= \frac{2e^{\beta \mu} \cosh(\beta \epsilon_0)}{\underline{\underline{1 - 2e^{\beta \mu} \cosh(\beta \epsilon_0)}}}.\end{aligned}$$

c) Frå b) får vi

$$e^{\beta\mu} = \frac{\langle N \rangle}{\langle N \rangle + 1} \frac{1}{2 \cosh(\beta\epsilon_0)}$$

Dette gjev

$$\mu = \underline{\underline{k_B T \ln \left[\frac{\langle N \rangle}{\langle N \rangle + 1} \frac{1}{2e^{\beta\mu} \cosh(\beta\epsilon_0)} \right]}}.$$

d) Frå c) har vi

$$2e^{\beta\mu} \cosh(\beta\epsilon_0) = \frac{\langle N \rangle}{\langle N \rangle + 1}.$$

Dette gjev

$$\Theta = 1 + \langle N \rangle.$$

Innsett får vi

$$\begin{aligned} P(N) &= \frac{e^{\beta\mu N} Z_N}{\Theta} \\ &= \frac{\langle N \rangle^N}{\underline{\underline{(\langle N \rangle + 1)^{N+1}}}}. \end{aligned}$$

Oppgave 3

a) I grensa $T \rightarrow 0$ får vi

$$\rho = \frac{1}{\hbar^2} \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \theta(\mu - \epsilon),$$

der

$$\epsilon = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}.$$

Integrasjon gjev da

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{2\pi\hbar^2} \int_0^\infty dp p \theta(\mu - \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}) \\ &= \underline{\underline{\frac{p_F^2}{4\pi\hbar^2}}}, \end{aligned}$$

der Fermiimpulsen er definert ved $\mu = \epsilon_F = \sqrt{p_F^2 c^2 + m^2 c^4}$.

b)

$$\begin{aligned} \frac{\langle E \rangle}{V} &= \frac{1}{\hbar^2} \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \epsilon \theta(\mu - \epsilon) \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar^2} \int_0^\infty dp p \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \theta(\mu - \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}) \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{6\pi\hbar^2 c^2} \left[(p_F^2 c^2 + m^2 c^4)^{\frac{3}{2}} - m^3 c^6 \right]}}, \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}
P &= \frac{1}{\hbar^2} \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} (\mu - \epsilon) \theta(\mu - \epsilon) \\
&= \frac{1}{2\pi\hbar^2} \int_0^\infty dp p (\mu - \epsilon) \theta(\mu - \epsilon) \\
&= \frac{1}{12\pi\hbar^2 c^2} \left[3p_F^2 \sqrt{p_F^2 c^2 + m^2 c^4} - \frac{2}{c^2} (p_F^2 c^2 + m^2 c^4)^{\frac{3}{2}} + 2m^3 c^4 \right].
\end{aligned}$$

c) I den ultrarelativistiske grensa er $m = 0$. Dette gjev

$$P = \frac{p_F^3 c}{12\pi\hbar^2}.$$

Frå uttrykket for ρ finn ein

$$p_F = \sqrt{4\pi\hbar^2 \rho}$$

Dette gjev

$$P = \frac{\hbar c}{3} \sqrt{4\pi\rho}^{\frac{3}{2}}.$$

d) Vi rekkeutviklar til fjerde orden $x = p_F/mc \ll 1$:

$$\frac{\langle E \rangle}{V} = \frac{mc^2}{4\pi\hbar^2} \frac{p_F^2}{2} + \frac{p_F^4}{16\pi m\hbar^2},$$

der vi har brukt

$$(1+x)^{\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \dots,$$

der $x = p_F^2/(mc)^2$. Det første leddet er $mc^2\rho$, slik at dette er bidraget til energitettheten som kjem frå kvileenergien til partiklane.

Oppgave 4

a) Anta

$$H = ap_i^2 + H'(p, q),$$

der variablen p_i ikkje inngår i funksjonen $H'(p, q)$. Forventningsverdien til leddet ap_i^2 er

$$\langle ap_i^2 \rangle = \frac{\int ap_i^2 e^{-\beta(ap_i^2 + H'(p, q))} dp dq}{\int e^{-\beta(ap_i^2 + H'(p, q))} dp dq}.$$

Sidan integrasjonen over alle p 'ane og q 'ane unntatt p_i er den same i tellar og nevnar, kan ein forkorte desse faktorane. Dette gir

$$\langle ap_i^2 \rangle = \frac{\int ap_i^2 e^{-\beta ap_i^2} dp_i}{\int e^{-\beta ap_i^2} dp_i}.$$

Integrasjon gir

$$\langle ap_i^2 \rangle = \frac{1}{2} k_B T .$$

Kvart kvadratisk ledd i den klassiske Hamiltonfunksjonen gir eit bidrag $\frac{1}{2} k_B T$ til energien og difor eit bidrag $\frac{1}{2} k_B$ til varmekapasiteten. Forutsetninga er separasjonen av H .

b) Hamiltonfunksjonen er

$$H = -J \sum_{i=1}^N s_i s_{i+1} - B\mu \sum_{i=1}^N s_i ,$$

der $N+1=1$ pga av periodiske randkrav. Det er eit spinn på kvart gitterpunkt og desse spinna vekselverkar med nærmaste nabo. Koplinga mellom spinna er J og vekselverknaden avheng berre av den relative retninga til spinna. Dette er det første leddet. Det andre leddet er av paramagnetisk type (magnetisk moment i ytre magnetfelt). Kvart spinn vekselverkar med magnetfeltet. Antiferromagnetisme tyder $J < 0$ og energien blir minimal viss annakvart spinn peikar opp og annakvart spinn peikar ned. Dette er da grunntilstanden (som er dobbelt degenerert).

c) Materie i ein kvit dverg er essensielt eit gitter av positive ionar og ein degenerert elektrongass. Dvergen er elektrisk nøytral og temperaturen er låg ($T \ll T_F$, der T_F er Fermitemperaturen). Det er kvantetrykket som er motverkar kollaps. Kvantetrykket er ein konsekvens av Pauliprinsippet, som seier at identiske fermion ikkje kan vere i same kvantetilstand. Dette trykket er altså ein kvantemekanisk effekt. Derav namnet. Kvantetrykket er dominert av elektronbidraget.

d) Det er klassiske forhold dersom

$$\rho \Lambda^3 \ll 1 ,$$

der Λ er den termiske bølgelengda og ρ er tettheiten.