

Løysingsframlegg Eksamen TFY 4230

Statistisk Fysikk 19/12-2007

January 10, 2008

Oppgave 1

1) Faktoren $N!$ er Gibbs' korreksjonsfaktor som ein må innføre ad hoc i klassisk statistisk mekanikk fordi partiklane i gassen ikkje er skillbare. Vi har

$$Z = \frac{1}{h^2} \int e^{-\beta H} d^2p d^2x ,$$

der vi har delt på h^2 slik at den klassiske partisjonsfunksjonen blir dimensjonslaus. Sidan H er uavhengig av posisjonen, gir integrasjon over koordinatane ein faktor $V = L^2$. Når vi skal integrere over impulsen nyttar vi polarkoordinatar. Integrasjon over vinkelen θ gir ein faktor 2π . Dette gjev

$$Z = \frac{2\pi V}{h^2} \int_0^\infty e^{-\beta H} p dp ,$$

Skifte av variabel $y = \beta \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$ gjev

$$\begin{aligned} Z &= \frac{2\pi V}{(\beta \hbar c)^2} \int_{\beta m c^2}^\infty y e^{-y} dy \\ &= \frac{2\pi V}{(\beta \hbar c)^2} (1 + \beta m c^2) e^{-\beta m c^2} \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= - \frac{\partial \ln Z_N}{\partial \beta} \\ &= -N \frac{\partial}{\partial \beta} [-2 \ln \beta - \beta m c^2 + \ln(1 + \beta m c^2) + \dots] \\ &= \underline{\underline{N \left[2k_B T + m c^2 - \frac{m c^2}{1 + \beta m c^2} \right]}} \end{aligned}$$

I den ikkje-relativistiske grensa er $\beta mc^2 \gg 1$ og vi kan rekkeutvikle siste leddet i $\langle E \rangle$. Vi får da

$$\begin{aligned}\langle E \rangle &= N \left[2k_B T + mc^2 - \frac{1}{\beta} \frac{1}{1 + \frac{1}{\beta mc^2}} \right] \\ &\approx N \left[k_B T + mc^2 - \frac{1}{\beta} \right], \\ &= \underline{\underline{N(mc^2 + k_B T)}}.\end{aligned}$$

Første leddet er kvileenergien til partiklane. Det andre leddet er termisk energi. Det er to kvadratiske ledd i H og ekvipartisjonsprinsippet gjev eit bidrag $k_B T/2$ frå kvart av dei.

3) For små verdier av βmc^2 rekkeutviklar vi siste leddet til første orden:

$$\begin{aligned}\langle E \rangle &= N \left[2k_B T + mc^2 - \frac{mc^2}{1 + \beta mc^2} \right] \\ &\approx N \left[2k_B T + mc^2 - mc^2(1 - \beta mc^2) \right] \\ &= \underline{\underline{N \left[2k_B T + \frac{(mc^2)^2}{k_B T} \right]}}.\end{aligned}$$

4) Vi har

$$\begin{aligned}C_V &= \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T} \\ &= \underline{\underline{Nk_B \left[2 - \frac{1}{(1 + k_B T/mc^2)^2} \right]}}.\end{aligned}$$

Oppgave 2

1) J er styrken på spinn-spinn vekselverknaden (nærmaste nabo). Dersom J er positiv har spinna ein tendens til å vere parallelle ved låg temperatur (minimalisering av energien). Dette er ein ferromagnetisk Ising modell. Dersom $J < 0$ vil spinna gjerne peike i motsett retning ved låg temperatur og dette er det antiferromagnetiske tilfellet.

2) For kvar spinnkonfigurasjon $\{s_i\}$ med energi $E = H(\{s_i\})$, er det ein spinnkonfigurasjon med same energi, der alle spinna peikar i motsett retning. Desse to konfigurasjonane er like sannsynlege og midlere spinn må da bli null.

3) Kvart spin er ein paramagnet som vekselverkar med det ytre magnetfeltet B . Proporsjonalitetskonstanten μ er det magnetiske momentet. Vi har da:

$$\underline{\underline{H_B = -\mu B \sum_{i=1}^N s_i}}.$$

Oppgave 3

1) Vi har

$$\rho_{\text{ex}} = \frac{1}{\hbar^2} \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1}.$$

Vi bruker polarkoordinatar og integrasjon over ϕ gjev ein faktor 2π :

$$\rho_{\text{ex}} = \frac{1}{2\pi\hbar^2} \int_0^\infty \frac{p}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1} dp.$$

Ny variabel $y = \beta p^2/2m$ gjev

$$\begin{aligned} \rho_{\text{ex}} &= \frac{1}{2\pi\hbar^2} \frac{m}{\beta} \int_0^\infty \frac{dy}{e^{y-\beta\mu} - 1} \\ &= \frac{1}{\Lambda^2} \int_0^\infty \frac{e^{\beta\mu-y} dy}{1 - e^{\beta\mu-y}}. \end{aligned}$$

Integrasjon mop y gjev nå

$$\begin{aligned} \rho_{\text{ex}} &= \frac{1}{\Lambda^2} \ln(1 - e^{\beta\mu-y}) \Big|_0^\infty \\ &= \underline{\underline{-\frac{1}{\Lambda^2} \ln(1 - e^{\beta\mu})}}. \end{aligned}$$

Alternativt kan ein skrive integranden som ei geometrisk rekke og integrere ledd for ledd. Ein kan da idenifisere den rekka som ein har integrert som Taylorrekka for $\ln(1 - e^{\beta\mu})$.

2) Rekkeutvikling av uttrykket for ρ gjev

$$\begin{aligned} \rho &= -\frac{1}{\Lambda^2} \ln(1 - e^{\beta\mu}) \\ &= \frac{1}{\Lambda^2} \left[z + \frac{1}{2} z^2 + \dots \right]. \end{aligned}$$

Dette gjev: $\underline{\underline{a_1 = \frac{1}{\Lambda^2}, a_2 = \frac{1}{2\Lambda^2}}}$

Vi har

$$\frac{P}{k_B T} = -\frac{1}{\hbar^2} \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \ln(1 - e^{-\beta(\epsilon-\mu)}).$$

Integrasjon over vinklar og skifte av variabel gjev

$$\begin{aligned} \frac{P}{k_B T} &= -\frac{2\pi}{\hbar^2} \int_0^\infty dp p \ln(1 - e^{-\beta(\epsilon-\mu)}) \\ &= -\frac{2\pi m}{\hbar^2} \int_0^\infty d\epsilon \ln(1 - e^{-\beta(\epsilon-\mu)}). \end{aligned}$$

Rekkeutvikling av integranden og integrasjon ledd for ledd gjev:

$$\begin{aligned}\frac{P}{k_B T} &= \frac{2\pi m}{h^2} \int_0^\infty d\epsilon \left[e^{-\beta(\epsilon-\mu)} + \frac{1}{2} e^{-2\beta(\epsilon-\mu)} + \dots \right] \\ &= \frac{2\pi m}{\beta h^2} \left[e^{\beta\mu} + \frac{1}{4} e^{2\beta\mu} \dots \right] \\ &= \frac{1}{\Lambda^2} \left[z + \frac{1}{4} z^2 \dots \right] .\end{aligned}$$

Dette gjev $b_1 = \frac{1}{\Lambda^2}$, $b_2 = \frac{1}{4\Lambda^2}$.

Invertering av uttrykket for ρ gjev

$$z = \Lambda^2 \left(\rho - \frac{1}{2} \rho^2 \right) .$$

Innsett i uttrykket for $P/k_B T$ får vi

$$\begin{aligned}\frac{P}{k_B T} &= \left(\rho - \frac{1}{2} \rho^2 \right) + \frac{1}{4} \rho^2 \Lambda^2 \\ &= \rho - \frac{1}{4} \Lambda^2 \rho^2 .\end{aligned}$$

Dette gjev $B_2(T) = -\frac{1}{4} \Lambda^2$. Den andre virialkoeffisienten er negativ. Dette er å vente sidan dette er ein Bose gas. Trykket er mindre for ein gitt tettheit samanlikna med ein klassisk ideel gass og har med statistikken (symmetriske bølgefunksjonar) å gjere. Dette er effektivt ei tiltrekkande kraft som gjev opphav til BEC.

3) Vi veit at $\mu \leq 0$ sidan alle besetningtala er positive. Ein ser direkte at ρ_{ex} er divergent når $\mu \rightarrow 0^-$ for alle endelege verdier av β . Altså kan alle partiklane vere i dei eksiterte tilstandane for $T > 0$. For $T = 0$ er alle partiklane sjølsagt i grunntilstanden. Dette tyder at $T_c = 0$.

Oppgave 4

1) Vi har

$$\epsilon_{\pm} = \epsilon_F .$$

Dette gjev

$$\frac{(p_F^{\pm})^2}{2m} = \epsilon_F \pm \mu B ,$$

eller

$$\underline{\underline{p_F^{\pm} = \sqrt{2m(\epsilon_F \pm \mu B)}}} .$$

2) Uttrykket for tettheten er

$$\rho_{\pm} = \frac{1}{\hbar^3} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \theta(\epsilon_F - \epsilon_{\pm}) .$$

Integrasjon over vinklar gjev:

$$\rho_{\pm} = \frac{1}{2\pi^2 \hbar^3} \int_0^{\infty} dp p^2 \theta(\epsilon_F - \epsilon_{\pm}) .$$

Multiplikasjon med V og bruk av step-funksjonen får vi

$$\underline{\underline{N_{\pm} = \frac{V}{2\pi^2 \hbar^3} \int_0^{p_F^{\pm}} dp p^2 .}}$$

3) Integrasjon gjev

$$N_{\pm} = \frac{V (p_F^{\pm})^3}{6\pi^2 \hbar^3} .$$

Innsetting for $p_F^{\pm}$ gjev

$$\underline{\underline{N_{\pm} = \frac{V}{6\pi^2 \hbar^3} [2m (\epsilon_F \pm \mu B)]^{3/2} .}}$$

4) Til første orden i B har vi

$$M = M(B=0) + \left. \frac{\partial M}{\partial B} \right|_{B=0} B .$$

Sidan $N_+ = N_-$ når $B=0$, er $M(B=0) = 0$ og vi får

$$M = \chi B ,$$

der

$$\chi = \left. \frac{\partial M}{\partial B} \right|_{B=0} .$$

Derivasjon av $M = \mu(N - N_-)$ mop B gjev

$$\frac{\partial M}{\partial B} = \frac{Vm\mu^2}{2\pi^2 \hbar^3} \left\{ [2m (\epsilon_F + \mu B)]^{1/2} + [2m (\epsilon_F - \mu B)]^{1/2} \right\} .$$

Evaluert i $B=0$ får vi

$$\underline{\underline{\chi = \frac{Vm\mu^2}{\pi^2 \hbar^3} \sqrt{2m\epsilon_F} .}}$$