

Løysingsframlegg Eksamen TFY 4230

Statistisk Fysikk onsdag 17/12-2008

August 19, 2009

Oppgave 1

a) D er diffusjonskonstanten. Dette er ein “materialkonstant” som avheng av løysemiddelet og substansen som er løyst. Vi skriv

$$\mathbf{j} = -D\nabla C(x, t) .$$

Dette gjev

$$\frac{\partial C(x, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 .$$

Kontinuitetslikninga seier at talet på partiklar er bevart når det ikkje finst kjelder eller sluk. Dette er heilt analogt til elektromagnetisme der ladninga ρ er bevart.

b) Vi skriv

$$C(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} c(p, t) dp .$$

Innsett i diffusjonslikninga får vi

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial c(p, t)}{\partial t} + Dp^2 c(p, t) \right] e^{ipx} dp = 0 .$$

Vi Fouriertransformerer tilbake

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial c(p, t)}{\partial t} + Dp^2 c(p, t) \right] e^{i(p-q)x} dp dx = 0 .$$

Vi har at

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(p-q)x} dx = \delta(p-q) .$$

Etter integrasjon over p får ein

$$\frac{\partial c(q, t)}{\partial t} + Dq^2 c(q, t) = 0 .$$

Løysinga til denne differensiallikninga er

$$c(q, t) = A(q) e^{-Dq^2 t} .$$

Vi har da at $c(q, t = 0) = A(q)$. For å finne $A(q)$, må vi Fouriertransformere $C(x, t = 0) = C_0(x)$:

$$\begin{aligned} c(q, t = 0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iqx} C_0(x) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iqx} e^{-\alpha x^2} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-q^2/4\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(x+iq/2\alpha)^2} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-q^2/4\alpha} \end{aligned}$$

Altså er

$$c(q, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-q^2/4\alpha} e^{-Dq^2 t} .$$

For å finne $C(x, t)$ Fouriertransformerer vi $c(q, t)$:

$$\begin{aligned} C(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iqx} e^{-q^2/4\alpha} e^{-Dq^2 t} dq \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{\alpha}{\pi(1+4Dt\alpha)}}} e^{-x^2 \frac{\alpha}{1+4Dt\alpha}} . \end{aligned}$$

$C(x, t = 0)$ er normert til ein. Vi ser at $C(x, t)$ også er normert til ein. Dette er ein konsekvens av partikkeltalet er bevart.

Oppgave 2

a) Det første leddet representerer vekselverknaden mellom magnetfeltet og dei einskilde spinna. Dette er ein paramagnetisk vekselverknad. μ er magnetisk moment. Det andre leddet representerer næmaste-nabo vekselverknad, der J er styrken. $J > 0$ er det ferromagnetiske tilfellet (spinna er parallelle for $T = 0$) og $J < 0$ er det antiferromagnetiske tilfellet (spinna er antiparallelle for $T = 0$).

b) Hamiltonfunksjonen er

$$H = -\mu B(s_1 + s_2) - 2Js_1s_2.$$

Vi har fire moglege konfigurasjonar:

$$\underline{(\uparrow\uparrow)}, \underline{(\uparrow\downarrow)}, \underline{(\downarrow\uparrow)}, \underline{(\downarrow\downarrow)}.$$

Dei tilhøyrande energiane er

$$\begin{aligned} E((\uparrow\uparrow)) &= \underline{\underline{-2\mu B - 2J}}, \\ E((\uparrow\downarrow)) &= \underline{\underline{2J}}, \\ E((\downarrow\uparrow)) &= \underline{\underline{2J}}, \\ E((\downarrow\downarrow)) &= \underline{\underline{2\mu B - 2J}}. \end{aligned}$$

Partisjonsfunksjonen blir da

$$\begin{aligned} Z_2 &= 2e^{-2\beta J} + e^{2\beta J} (e^{2\beta\mu B} + e^{-2\beta\mu B}) \\ &= \underline{\underline{2e^{-2\beta J} + 2e^{2\beta J} \cosh 2\beta\mu B}} \end{aligned}$$

c) Middelveien til spinnen er

$$\langle s \rangle = \frac{e^{2\beta J} \sinh 2\beta\mu B}{\underline{\underline{e^{-2\beta J} + e^{2\beta J} \cosh 2\beta\mu B}}}.$$

Dette gjev

$$\lim_{B \rightarrow \infty} \langle s \rangle = \underline{\underline{1}}$$

Når $\mu B \gg J$ dominerer det paramagnetiske leddet i H . Når $B \rightarrow \infty$ kostar det uendeleg mykje energi å eksitere systemet og det må difor vere i grunntilstanden. Denne tilstanden har $s_1 = s_2 = \uparrow$. Altså $\lim_{B \rightarrow \infty} \langle s \rangle = 1$.

d) Vi kan skrive

$$H = \sum_{i=1}^N H_i,$$

der $H_i = -\mu B s_i$, altså er H separabel. Sidan spinna er skillbare har vi $Z_N = Z^N$, der Z er partisjonsfunksjonen for eit spinn. Vi har

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{s=\pm 1} e^{-\beta H(s)} \\ &= e^{-\beta\mu B} + e^{\beta\mu B} \\ &= 2 \cosh \beta\mu B. \end{aligned}$$

Dette gjev

$$Z_N = \underline{\underline{[2 \cosh \beta\mu B]^N}}.$$

Midlere energi er

$$\begin{aligned}\langle E \rangle &= -\frac{\partial \ln Z_N}{\partial \beta} \\ &= -N \frac{\partial}{\partial \beta} [\ln 2 + \ln \cosh \beta \mu B] \\ &= \underline{\underline{-N \mu B \tanh \beta \mu B}} .\end{aligned}$$

Vidare har vi

$$\lim_{T \rightarrow 0} \langle E \rangle = \underline{\underline{-N \mu B}} .$$

Når $T = 0$ er systemet i grunntilstanden og alle spinna peiker opp. For denne konfigurasjonen er $E = -N \mu B$.

Oppgave 3

Hamiltonfunksjonen for ein partikkel er

$$H = \frac{p^2}{2m} ,$$

der $p = |\mathbf{p}|$ er impulsen. Hamiltonfunksjonen for gassen er da

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} .$$

Partisjonsfunksjonen er da

$$Z_N = \frac{1}{h^{3N} N!} \int e^{-\beta H(p,x)} d^3 p_1 \dots d^3 x_N .$$

Vi har delt på $N!$ fordi partiklane ikkje er skillbare. Det er og ein faktor h^3 per partikkel for å gjere Z_N dimensjonslaus. Vi har da

$$Z_N = \frac{Z^N}{N!} ,$$

der Z er partisjonsfunksjonen for ein partikkel

$$Z = \frac{1}{h^3} \int e^{-\beta H} d^3 p d^3 x ,$$

Dette gjev

$$\begin{aligned}Z &= \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^\infty p^2 e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} dp \\ &= V \left(\frac{2m\pi}{h^2 \beta} \right)^{3/2} .\end{aligned}$$

Innsetting gjev

$$Z_N = \frac{V^N}{N!} \left(\frac{2m\pi}{h^2\beta} \right)^{3N/2}.$$

b) Vi har

$$\begin{aligned} P &= k_B T \frac{\partial \ln Z_N}{\partial V} \\ &= k_B T \frac{\partial}{\partial V} [N \ln V + \dots] \\ &= k_B T \frac{N}{V}. \end{aligned}$$

Eller

$$PV = \underline{\underline{Nk_B T}}.$$

c) Den storkanoniske partisjonsfunksjonen er

$$\begin{aligned} \Theta &= \sum_{N=0}^{\infty} e^{\beta\mu N} Z_N \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} e^{\beta\mu N} \left(\frac{1}{N!} \frac{V^N}{\Lambda^{3N}} \right) \\ &= e^{e^{\beta\mu} V / \Lambda^3}, \end{aligned}$$

der $\Lambda^2 = h^2 / 2\pi m k_B T$. Vi har

$$P(N) = \frac{1}{\Theta} e^{\beta\mu N} Z_N$$

Midlere partikkeltal $\langle N \rangle$ er

$$\begin{aligned} \langle N \rangle &= k_B T \frac{\partial \ln \Theta}{\partial \mu} \\ &= \frac{e^{\beta\mu} V}{\Lambda^3}. \end{aligned}$$

Dette gjev

$$\begin{aligned} Z_N &= \frac{e^{-\beta\mu N} \langle N \rangle^N}{N!}, \\ \Theta &= e^{\langle N \rangle}. \end{aligned}$$

Innsett får ein då

$$P(N) = \frac{e^{-\langle N \rangle} \langle N \rangle^N}{\underline{\underline{N!}}}.$$

Dette er ei Poissonfordeling med parameter $t = \langle N \rangle$.

d)

$$\begin{aligned}\frac{PV}{k_B T} &= \ln \Theta \\ &= \frac{e^{\beta \mu} V}{\Lambda^3}.\end{aligned}$$

Dette gjev

$$PV = \underline{\underline{\langle N \rangle k_B T}}.$$

Dette er ideell gasslov med $N \rightarrow \langle N \rangle$. For $\langle N \rangle \gg 1$ er fluktuasjonane i N neglisjerbare og ein får same oppførsel som i kanonisk ensemble.

Oppgave 4

a) La $f_{ii}^{(n)}$ vere sannsyna for at systemet kjem tilbake til tilstand i for fyrste gong etter n steg. La

$$f_{ii}^* = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)}.$$

Dersom $f_{ii}^* = 1$ er tilstanden i rekurrent. Viss $f_{ii}^* < 1$ er tilstanden i transient.

b) Trykket til ein Fermigass ved $T = 0$ er større enn null. Dette i motsetnad til ein klassisk gass der tilstandslikninga er $P = \rho k_B T$ og der $P = 0$ for $T = 0$. Kvantetrykket er ein konsekvens av Pauliprinsippet, som seier at identiske fermion ikkje kan vere i same kvantetilstand. Dette trykket er altså ein kvantemekanisk effekt. Derav namnet. Det er to krefter som gjer at stjerna er i hydrostatisk likevekt: Gravitasjonskrafta som verkar innover og kvantetrykket som verkar utover. Gravitasjonskrafta er dominert av bidraget frå protonar/nøytroner i stjerna, medan elektrongassen gjev det dominerande bidraget til kvantetrykket.

c) Vi skriv Z om til eit integral

$$Z = \int_0^{\infty} (2l+1) e^{-l(l+1)\Theta_R/T} ,$$

sidan l essensielt er ein kontinuerleg variabel. Sett $y = (\Theta_R/T)l(l+1)$. Dette gjev

$$\begin{aligned}Z &= \frac{T}{\Theta_R} \int_0^{\infty} e^{-y} dy \\ &= \underline{\underline{\frac{T}{\Theta_R}}}.\end{aligned}$$

Den midlere energien blir da

$$\begin{aligned}\langle E \rangle &= -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \\ &= \underline{\underline{k_B T}}.\end{aligned}$$

d) Vi har

$$\frac{P}{k_B T} = -\frac{1}{\hbar^d} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \ln [1 - e^{-\beta p^n}] .$$

Integrasjon over vinklane gjev

$$\frac{P}{k_B T} = -\frac{1}{\hbar^d} \frac{2^{1-d}}{\pi^{d/2} \Gamma(d/2)} \int_0^\infty \ln [1 - e^{-\beta p^n}] p^{d-1} .$$

Delvis integrasjon med $f' = p^{d-1}$ og $g(p) = \ln [1 - e^{-\beta p^n}]$, gjev

$$\begin{aligned} f(p) &= \frac{p^d}{d} , \\ g'(p) &= -\frac{\beta}{e^{\beta p^n} - 1} n p^{n-1} . \end{aligned}$$

Trykket blir difor

$$P = \frac{n}{d} \frac{1}{\hbar^d} \frac{2^{1-d}}{\pi^{d/2} \Gamma(d/2)} \int_0^\infty \frac{p^{d+n-1}}{e^{\beta p^n} - 1} .$$

Energitettleiken blir etter integrasjon over vinklane

$$\frac{\langle E \rangle}{V} = \frac{1}{\hbar^d} \frac{2^{1-d}}{\pi^{d/2} \Gamma(d/2)} \int_0^\infty \frac{p^{d+n-1}}{e^{\beta p^n} - 1} .$$

Altså er

$$P = \frac{n}{d} \frac{\langle E \rangle}{V} .$$