

Løsningsforslag til kontinuasjonseksamen august 2010

Oppgave 1

a)

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\beta H} \\ &= \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-\frac{\beta}{2m} p^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{\beta}{2} k x^2} \\ &= \frac{1}{h} \sqrt{\frac{2m\pi}{\beta}} \sqrt{\frac{2\pi}{k\beta}} \\ &= \underline{\underline{\frac{2\pi}{h} \sqrt{\frac{m}{k}} \frac{1}{\beta}}} \end{aligned}$$

Kommentar: Normalisering ved å dele med Plancks konstant h er ikke nødvendig for å få riktig svar i resten av oppgaven, men det gjør Z dimensjonsløs. Det er lettest å se ved å skrive om Z på formen (bruker $\beta = 1/kT$ og $\frac{k}{m} = \omega = 2\pi f$)

$$Z = \frac{kT}{hf}$$

der f er frekvensen til den harmoniske oscillatoren. Både kT og hf har dimensjon energi (Joule i SI-enheter), så Z er dimensjonsløs.

b)

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z \\ &= -\frac{\partial}{\partial \beta} (\text{konst.} - \ln \beta) \\ &= \frac{1}{\beta} \\ &= \underline{\underline{kT}} \\ C_V &= \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T} = \underline{\underline{k}} \end{aligned}$$

- c) Ekvipartisjonsprinsippet sier at hvert kvadratiske ledd i Hamiltonfunksjonen bidrar med en faktor $\frac{1}{2}kT$ til den midlere energien $\langle E \rangle$. I vårt tilfelle består Hamiltonfunksjonen av to kvadratiske ledd (og ikke mer!), så midlere energi skal i følge ekvipartisjonsprinsippet være

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2}kT + \frac{1}{2}kT = \underline{\underline{kT}}$$

som var det vi fant i deloppgave b).

d)

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n} \\ &= e^{-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\beta\hbar\omega} \\ &= \frac{e^{-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} \end{aligned}$$

Kommentar: Partisjonsfunksjonen kan alternativt uttrykkes ved en hyperbolsk sinusfunksjon:

$$\begin{aligned} Z &= \frac{e^{-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} \\ &= \frac{1}{e^{\frac{1}{2}\beta\hbar\omega} - e^{-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega}} \\ &= \frac{1}{2 \sinh\left(\frac{1}{2}\beta\hbar\omega\right)} \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= -\frac{\partial}{\partial\beta} \ln Z \\ &= \frac{\partial}{\partial\beta} \ln \sinh\left(\frac{1}{2}\beta\hbar\omega\right) \\ &= \frac{1}{2}\hbar\omega \frac{\cosh\left(\frac{1}{2}\beta\hbar\omega\right)}{\sinh\left(\frac{1}{2}\beta\hbar\omega\right)} \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{2}\hbar\omega \coth\left(\frac{1}{2}\beta\hbar\omega\right)}} \end{aligned}$$

Eventuelt kan man skrive dette som:

$$\begin{aligned}
 \langle E \rangle &= \frac{1}{2} \hbar \omega + \frac{\hbar \omega}{e^{\beta \hbar \omega} - 1} \\
 C_V &= \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T} \\
 &= \frac{\partial \beta}{\partial T} \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial \beta} \\
 &= -k \beta^2 \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial \beta} \\
 &= -\frac{1}{2} \hbar \omega k \beta^2 \frac{\partial}{\partial \beta} \coth \left(\frac{1}{2} \beta \hbar \omega \right) \\
 &= \underline{\underline{k \frac{(\beta \hbar \omega / 2)^2}{\sinh^2 \left(\frac{1}{2} \beta \hbar \omega \right)}}}
 \end{aligned}$$

f) Lavtemperaturgrensa, $T \rightarrow 0$ eventuelt $\beta \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned}
 \langle E \rangle &= \frac{1}{2} \hbar \omega + \frac{\hbar \omega}{e^{\beta \hbar \omega} - 1} \\
 &\approx \frac{1}{2} \hbar \omega + \hbar \omega e^{-\frac{\hbar \omega}{kT}}
 \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}
 C_V &= \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T} \\
 &\approx \hbar \omega \frac{\partial}{\partial T} e^{-\frac{\hbar \omega}{kT}} \\
 &= \underline{\underline{k \left(\frac{\hbar \omega}{kT} \right)^2 e^{-\frac{\hbar \omega}{kT}}}}
 \end{aligned}$$

Kommentar: $\langle E \rangle \rightarrow \frac{1}{2} \hbar \omega$ når $T \rightarrow 0$, mens varmekapasiteten går mot null.

g) Høy temperatur, $\beta \hbar \omega \ll 1$:

$$\begin{aligned}
 \langle E \rangle &= \frac{1}{2} \hbar \omega \coth \left(\frac{1}{2} \beta \hbar \omega \right) \\
 &= kT \left[\frac{1}{2} \beta \hbar \omega \coth \left(\frac{1}{2} \beta \hbar \omega \right) \right]
 \end{aligned}$$

Bruker så (se feks Rottmann):

$$x \coth x = 1 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{45}x^4 + \mathcal{O}(x^6) \quad x^2 < \pi^2$$

og får

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= kT \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \beta \hbar \omega \right)^2 + \mathcal{O}(\beta^4 \hbar^4 \omega^4) \right] \\ &\approx kT \left[1 + \frac{\hbar^2 \omega^2}{12 k^2 T^2} \right] \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} C_V &= \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T} \\ &\approx k \left[1 - \frac{\hbar^2 \omega^2}{12 k^2 T^2} \right] \end{aligned}$$

h) Se figur 1.

i) Frihetsgrader som ikke bidrar til varmekapasiteten ved en gitt temperatur sier vi er *frosset ut*.

Oppgave 2

a) Åtte mulige spinnkonfigurasjoner:

$$\underline{(\uparrow\uparrow\uparrow)}, \underline{(\downarrow\uparrow\uparrow)}, \underline{(\uparrow\downarrow\uparrow)}, \underline{(\uparrow\uparrow\downarrow)}, \underline{(\downarrow\downarrow\uparrow)}, \underline{(\uparrow\downarrow\downarrow)}, \underline{(\uparrow\downarrow\downarrow)}, \underline{(\downarrow\downarrow\downarrow)}$$

med tilhørende energier:

$$\underline{\epsilon_1 = 0}, \underline{\epsilon_2 = 2J}, \underline{\epsilon_3 = 0}, \underline{\epsilon_4 = -2J}, \underline{\epsilon_5 = -2J}, \underline{\epsilon_6 = 0}, \underline{\epsilon_7 = 2J}, \underline{\epsilon_8 = 0},$$

b) Partisjonsfunksjonen:

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{i=0}^8 e^{-\beta \epsilon_i} \\ &= 4 + 2e^{2\beta J} + 2e^{-2\beta J} \\ &= 8 \left(\frac{e^{\beta J} + e^{-\beta J}}{2} \right)^2 \\ &= \underline{\underline{8 \cosh^2(\beta J)}} \end{aligned}$$

c) Midlere energi:

$$\begin{aligned}
 \langle E \rangle &= -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \\
 &= -2 \frac{\partial}{\partial \beta} \ln \cosh(\beta J) \\
 &= -2 \frac{J \sinh(\beta J)}{\cosh(\beta J)} \\
 &= \underline{\underline{-2J \tanh(\beta J)}}
 \end{aligned}$$

Grensa $T \rightarrow 0$, eller ekvivalent $\beta \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned}
 \langle E \rangle &= -2J \lim_{\beta \rightarrow \infty} \tanh(\beta J) \\
 &= -2J \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{e^{\beta J} - e^{-\beta J}}{e^{\beta J} + e^{-\beta J}} \\
 &= \underline{\underline{-2J}}
 \end{aligned}$$

Ved $T = 0$ er systemet i grunntilstanden. Grunntilstanden har energi $-2J$.

d) Korrelasjonsfunksjonen:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{13} &= \langle s_1 s_3 \rangle \\
 &= \frac{1}{Z} \sum_{s_1=\pm 1} \sum_{s_2=\pm 1} \sum_{s_3=\pm 1} s_1 s_3 e^{\beta J(s_1 s_2 - s_2 s_3)} \\
 &= \frac{1}{Z} \sum_{s_1=\pm 1} \sum_{s_2=\pm 1} \sum_{s_3=\pm 1} (s_1 s_2)(s_2 s_3) e^{\beta J(s_1 s_2 - s_2 s_3)} \\
 &= \underline{\underline{-\tanh^2(\beta J)}}
 \end{aligned}$$

Grensa $T \rightarrow 0$, eller $\beta \rightarrow \infty$:

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \tanh(\beta J) = 1$$

som over, så

$$\lim_{T \rightarrow 0} \langle s_1 s_3 \rangle = \underline{\underline{-1}}$$

Systemet er i grunntilstanden når $T = 0$. Da peker s_1 opp og s_3 ned (eller omvendt), og dermed blir $aves_1 s_3 = -1$.

Oppgave 3

I denne oppgaven skal vi studere en ideell Bosegass i d dimensjoner. Partikkeltettheten ρ er gitt ved

$$\rho = C_d \int_0^\infty d\varepsilon \frac{\varepsilon^{(d-2)/2}}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1}$$

der C_d er en dimensjonsavhengig størrelse.

- a) Det kjemiske potensialet μ må være mindre enn ε , og spesielt lavere enn *minste* enpartikkelenergi ε_1 , hvis ikke kan partikkeltettheten ρ bli negativ.
- b) Siden $\varepsilon_1 \approx 0$ for makroskopiske system

$$\begin{aligned} \rho_{\text{maks}} &= C_d \int_0^\infty d\varepsilon \frac{\varepsilon^{(d-2)/2}}{e^{\beta\varepsilon} - 1} \\ &= C_d \int_0^\infty d\varepsilon \frac{\varepsilon^{(d-2)/2} e^{-\beta\varepsilon}}{1 - e^{-\beta\varepsilon}} \\ &= C_d \int_0^\infty d\varepsilon \varepsilon^{(d-2)/2} e^{-\beta\varepsilon} \sum_{n=0}^\infty e^{-n\beta\varepsilon} \\ &= C_d \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty d\varepsilon \varepsilon^{(d-2)/2} e^{-n\beta\varepsilon} \end{aligned}$$

Substituerer $t = \beta\varepsilon$:

$$\begin{aligned} \rho_{\text{maks}} &= C_d (kT)^{d/2} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{d/2}} \int_0^\infty dt t^{d/2-1} e^{-t} \\ &= \underline{\underline{C_d (kT)^{d/2} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \zeta\left(\frac{d}{2}\right)}} \end{aligned}$$

som var det vi skulle vise.

- c) Kritisk temperatur:

$$\rho = C_d (kT_c)^{d/2} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \zeta\left(\frac{d}{2}\right)$$

Løst for T_c :

$$T_c = \frac{\rho^{2/d}}{k \left[C_d \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \zeta\left(\frac{d}{2}\right) \right]^{2/d}}$$

d) Riemanns zeta-funksjon definert ved summen

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

er bare gyldig når $s > 1$, det vil si at summen divergerer når $d = 1$ og $d = 2$ og gir $T_c = 0$. Resultatet vårt i deloppgave c) gir dermed at vi får Bose-Einstein-kondensasjon når $d = 3$, men ikke lavere.

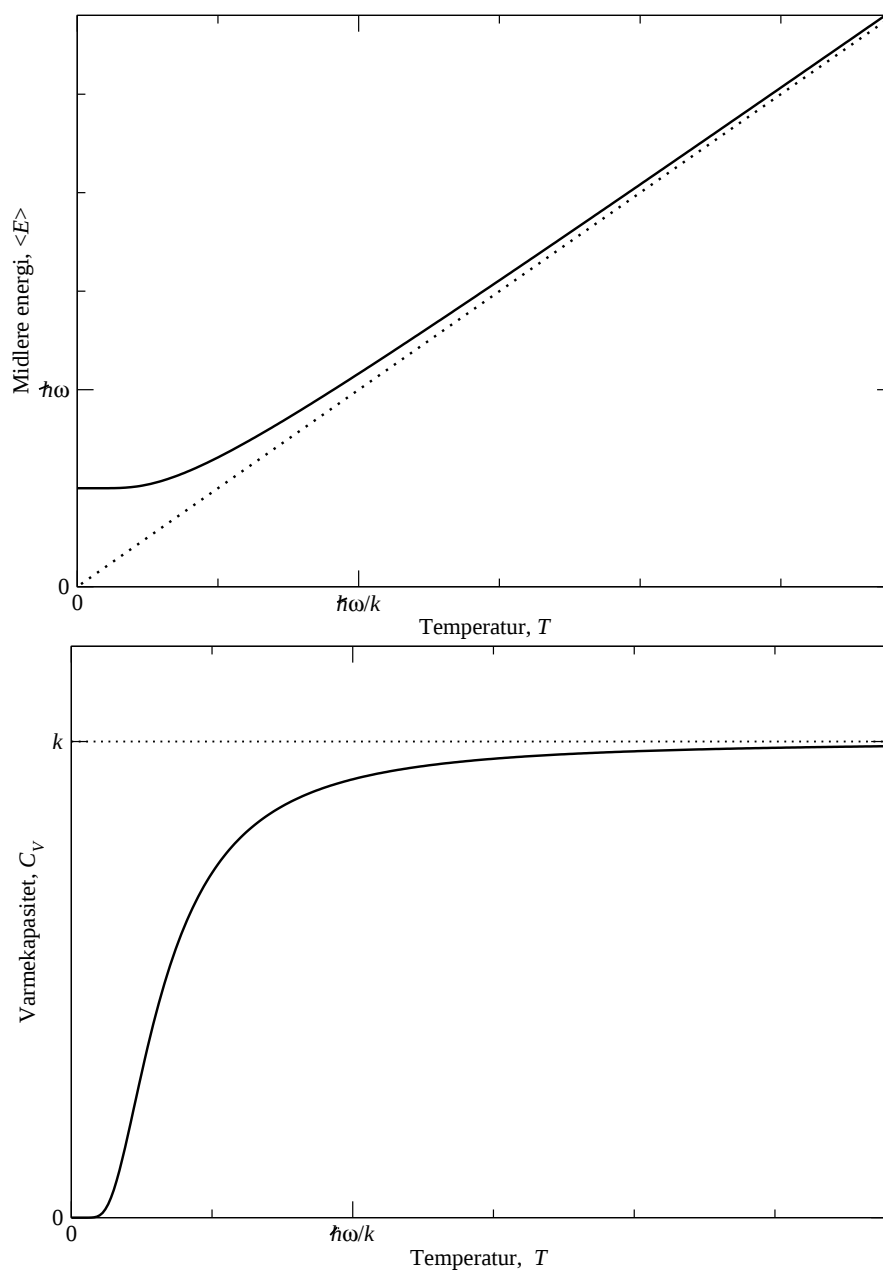


Figure 1: