

UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:

Navn: Per Arne Slotte

Telefon: 3647

Eksamen i fag 74316 Elektromagnetisk teori

Onsdag 22. mai 1991

Tid: 09.00–13.00

Tillatte hjelpemidler: Godkjent lommekalkulator

Rottmann, *Mathematische Formelsammlung*

Barnett og Cronin, *Mathematical Formulae*

Hvert delspørsmål teller likt. En del formler du kanskje får bruk for er samla i et vedlegg til oppgaven.

Oppgave 1:

Gitt Maxwell's likninger i vakum

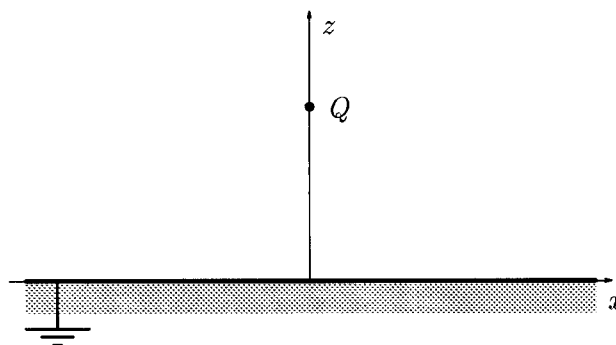
$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} &= \mu_0 \vec{j}\end{aligned}$$

Skriv opp de makroskopiske Maxwell likningene, og forklar hva som er sammenhengen mellom størrelsene i vakumlikningene og de makroskopiske likningene.

Kan du si noe om gyldighetsområdet for de makroskopiske likningene?

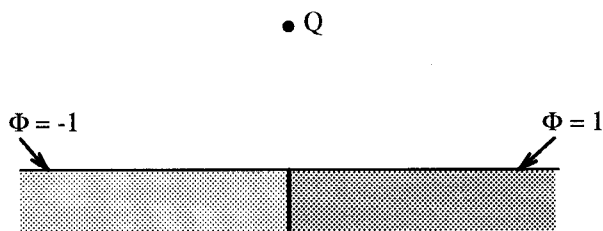
Oppgave 2:

- a) Forklar hvordan en kan løse et potensialproblem med randbetingelser ved hjelp av speil-ladninger.
- b) Ei punktladning Q er plassert i punktet $(0, 0, z_q)$ over en uendelig plan jorda metallisk leder (planet er gitt ved $z = 0$), som vist under



Beregn det elektrostatiske potensialet i rommet over planet.

c) Gitt ei ladnings og potensialfordeling som vist under:

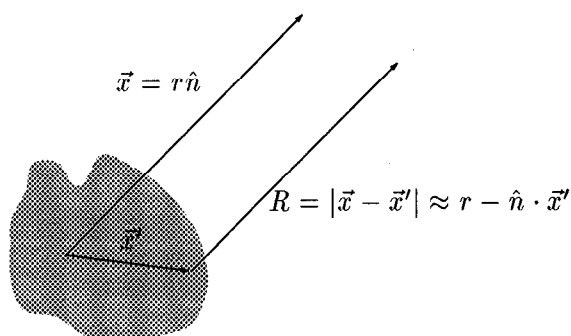


Ei punktladning Q er plassert i punktet $(0, 0, z_q)$ over et uendelig plan gitt ved $z = 0$. Planet består av to ulike metaller som holdes på potensial $\Phi = -1 V$ for $x < 0$ og $\Phi = 1 V$ for $x > 0$.

Beregn det elektrostatiske potensialet i rommet over planet.

Oppgave 3:

Ei strøm- og ladnings-fordeling er lokalisert til et område omkring origo, vist som grått i figuren under



a) Forklar forskjellen på nærfelt og strålingsfelt.

b) For ei gitt strømfordeling, $\vec{j}(\vec{x}, t)$, er vektorpotensialet

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{x}', t')}{R} \delta(t - t' - \frac{R}{c}) d^3x' dt'$$

Vis at for *strålingsfeltet* så kan den fouriertransformerte til vektorpotensialet, definert ved

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{A}(\vec{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

uttrykkes som

$$\vec{A}(\vec{x}, \omega) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \vec{I}(\hat{n}, \omega)$$

med

$$\vec{I}(\hat{n}, \omega) = \int \vec{j}(\vec{x}', \omega) e^{-ik(\hat{n} \cdot \vec{x}')} d^3x'$$

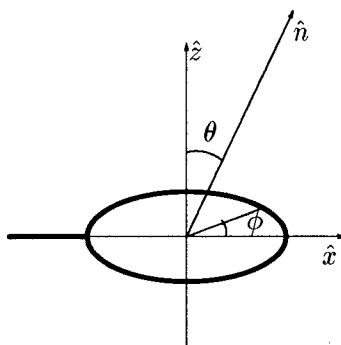
Her er $k = \omega/c$, og $\vec{j}(\vec{x}, \omega)$ er den fouriertransformerte strømfordelinga.

- c) Hva er dipolapprosimasjonen (Elektrisk dipolstråling)? Når er dipolapprosimasjonen god?
- d) Det oppgis at det for *strålingsfeltet* er følgende sammenheng mellom magnetisk induksjon, $\vec{B}(\vec{x}, \omega)$, og elektrisk felt, $\vec{E}(\vec{x}, \omega)$

$$\vec{E}(\vec{x}, \omega) = -c \hat{n} \times \vec{B}(\vec{x}, \omega)$$

Ei sirkulær antenne med radius r_0 ligger i (x, y) -planet, og eksiteres med en enkelt frekvens, ω_0 , slik at strømfordelinga er

$$\vec{j}(\rho, \theta, \phi, \omega) = \frac{\pi I_0}{r_0} \delta(\rho - r_0) \delta(\theta - \frac{\pi}{2}) (\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)) \hat{e}_\phi$$



Her har vi brukt polarkoordinater for å forenkle skrivemåten, og $\hat{e}_\phi$ er en enhetsvektor i ϕ -retninga.

Finn strålingsfeltet ($\vec{E}(r, t)$, $\vec{B}(r, t)$) og midlere energistrøm per romvinkelenhet, $\mathcal{U}(\hat{n})$.

Tips: Velg koordinatsystem slik at $\hat{z}$, $\hat{n}$ og $\hat{x}$ ligger i samme plan, og husk at $\vec{I}$ er en vektor slik at x -, y - og z -komponentene må beregnes hver for seg.

Oppgave 4:

- a) Forklar det fysiske innholdet i likninga

$$\partial_\alpha J^\alpha = 0$$

Hvordan transformerer denne likninga ved Lorentz-transformasjoner?

- b) En rett leder med tverrsnittsareal A har ei homogen fordeling av positivt lada partikler som er i ro i lederens hvilesystem, K . I tillegg går det en jevn strøm av negative partikler i en og samme retning med hastighet $\vec{u}$. Ladningene har størrelse $\pm e$, og konsentrasjonene er gitt ved henholdsvis n_+ og n_- . En observatør beveger seg med hastighet $\vec{v}$ parallelt med lederen. Hvilken ledningsstrøm ser observatøren?
- c) Gitt felttensoren

$$F^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{c}E_x & -\frac{1}{c}E_y & -\frac{1}{c}E_z \\ \frac{1}{c}E_x & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{1}{c}E_y & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{1}{c}E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}$$

Finn kontraksjonen $F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$ uttrykt ved $\vec{E}$ og $\vec{B}$.

Vedlegg 1: En del formler som kanskje er nyttige:

Integraler:

$$\int \frac{u \, du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{2} \ln(a^2 + u^2) + \text{Konstant}$$

$$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{u}{a}\right) + \text{Konstant}$$

$$\int_0^\infty (u^2 + a)^{-3/2} du = \frac{1}{a}$$

$$\int_0^{2\pi} e^{ix \cos \phi} \cos \phi \, d\phi = i2\pi J_1(x)$$

Løsning av Laplace's likning i kulekoordinater:

$$X(\rho, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left[A_{lm} \rho^l + B_{lm} \rho^{-(l+1)} \right] P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}$$

Potensialproblem med Neumann randbetingelser:

$$\Phi(\vec{x}) - \langle \Phi \rangle_S = \int_V G_N(\vec{x}, \vec{x}') \frac{\rho(\vec{x}')}{\epsilon} d^3x' + \int_S G_N(\vec{x}, \vec{x}') \nabla_{x'} \Phi(\vec{x}') \cdot d\vec{S}$$

Potensialproblem med Dirichlet randbetingelser:

$$\Phi(\vec{x}) = \int_V G_D(\vec{x}, \vec{x}') \frac{\rho(\vec{x}')}{\epsilon} d^3x' - \int_S \Phi(\vec{x}') \nabla_{x'} G_D(\vec{x}, \vec{x}') \cdot d\vec{S}$$

Fouriertransformasjonen:

$$F(\vec{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int F(\vec{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

$$F(\vec{x}, \omega) = \int F(\vec{x}, t) e^{i\omega t} dt$$

Volumelement i ulike koordinatsystemer:

Kartesiske:	$dV = dx \, dy \, dz$
Sylinderkoordinater:	$dV = \rho \, d\rho \, d\phi \, dz$
Polarkoordinater:	$dV = \rho^2 \sin \theta \, d\rho \, d\theta \, d\phi$