

UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Per Arne Slotte
Telefon: 3647

Eksamen i fag 74316 Elektromagnetisk teori

Mandag 12. august 1991

Tid: 09.00–13.00

Tillatte hjelpemidler: Godkjent lommekalkulator
Rottmann, *Mathematische Formelsammlung*
Barnett og Cronin, *Mathematical Formulae*

Hvert delspørsmål teller likt. En del formler du kanskje får bruk for er samla i et vedlegg til oppgaven.

Oppgave 1:

Gitt Maxwell's likninger i vakum

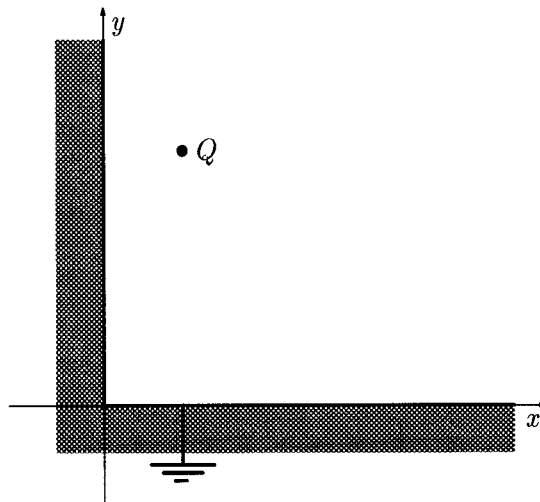
$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} &= \mu_0 \vec{j}\end{aligned}$$

Skriv opp de makroskopiske Maxwell likningene, og forklar hva som er sammenhengen mellom størrelsene i vakumlikningene og de makroskopiske likningene.

Kan du si noe om gyldighetsområdet for de makroskopiske likningene?

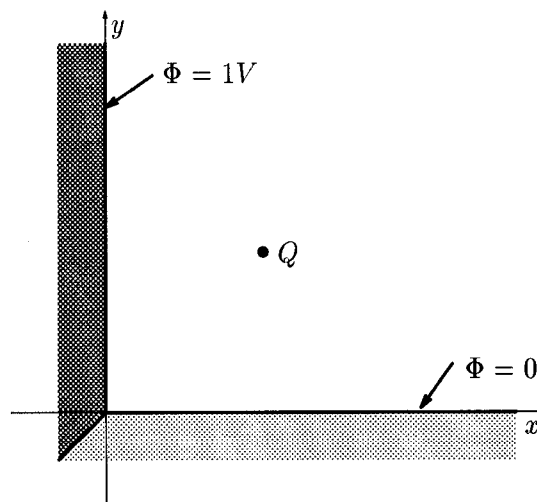
Oppgave 2:

- a) Forklar hvordan en kan løse et potensialproblem med randbetingelser ved hjelp av speil-ladninger.
- b) Ei punktladning Q er plassert i punktet (x_q, y_q, z_q) i vakum nær et hjørne i en jorda metallisk leder som vist i figuren under (De to metalliske veggene er definert ved $x = 0$ og $y = 0$).



Beregn det elektrostatiske potensialet i rommet utafor lederen (området $x > 0$ og $y > 0$).

c) Gitt ei ladnings og potensialfordeling som vist under:



Ei punktladning Q er plassert i punktet $(a, a, 0)$ i et område begrensa av to plane matalliske vegger definert ved $x = 0$ og $y = 0$. De to veggene holdes på ulike potensialer. $\Phi = 1V$ for $x < 0$ og $\Phi = 0$ for $y < 0$.

Beregn det elektrostatiske potensialet i rommet utafor metallene.

Oppgave 3:

- Forklar hva *dispersjon* er, og angi kort noen fysiske konsekvenser av dispersjon.
- Ei væske består av ρ_N identiske molekyler per volumenhet. I null elektrisk felt har ikke disse molekylene noe dipolmoment, men vi kan tenke oss at de inneholder to relativt

frie elektroner bundet i hvert sitt harmoniske potensial med karakteristiske frekvenser ω_1 og ω_2 , og dempningskonstanter γ_1 og γ_2 . Likninga for avviket fra middeposisjonen, x , til ei ladning e med masse m bundet av et harmonisk potensial med karakteristisk frekvens ω_i og dempningskonstant γ_i er

$$m(\ddot{x} + \gamma_i \dot{x} + \omega_i^2 x) = e\vec{E}(x, t)$$

Vis at permittiviteten (dielektrisitetskonstanten) til væska, $\epsilon(\omega)$, er gitt ved

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 \left(1 + \omega_p^2 \left(\frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2 - i\gamma_1\omega} + \frac{1}{\omega_2^2 - \omega^2 - i\gamma_2\omega} \right) \right)$$

hvor

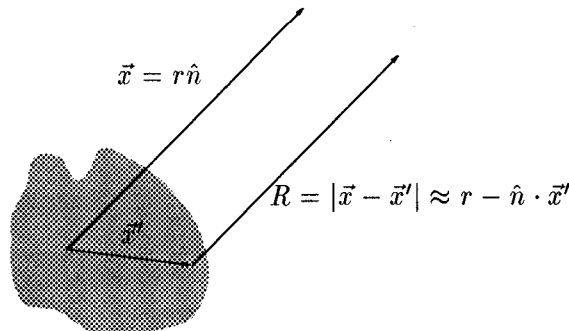
$$\omega_p = \sqrt{\frac{\rho_N e^2}{\epsilon_0 m}}$$

er plasmafrekvensen, e er elektronladninga og m er elektronmassen.

- c) Hva menes med *ressonant absorpsjon*? Forklar når vi har ressonant absorpsjon i væska i punkt b.

Oppgave 4:

Ei strøm- og ladningsfordeling er lokalisert til et område omkring origo, vist som grått i figuren under



- a) Forklar forskjellen på nærfelt og strålingsfelt.
b) For ei *gitt* strømfordeling, $\vec{j}(\vec{x}, t)$, er vektorpotensialet

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{x}', t')}{R} \delta(t - t' - \frac{R}{c}) d^3x' dt'$$

Vis at for *strålingsfeltet* så kan den fouriertransformerte til vektorpotensialet, definert ved

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{A}(\vec{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

uttrykkes som

$$\vec{A}(\vec{x}, \omega) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \vec{I}(\hat{n}, \omega)$$

med

$$\vec{I}(\hat{n}, \omega) = \int \vec{j}(\vec{x}', \omega) e^{-ik(\hat{n} \cdot \vec{x}')} d^3x'$$

Her er $k = \omega/c$, og $\vec{j}(\vec{x}, \omega)$ er den fouriertransformerte strømfordelinga.

- c) Hva er dipolapprosimasjonen (Elektrisk dipolstråling)? Når er dipolapprosimasjonen god?

Oppgave 5:

- a) Det elektromagnetiske potensialet (4-potensialet) tilfredstiller likninga

$$\partial_\alpha \partial^\alpha A^\beta = \mu_0 J^\beta \quad (1)$$

Hva er justerbetingelsen på potensialet?

- b) Forklar det fysiske innholdet i likningene

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \mu_0 J^\beta \quad (2)$$

og

$$\partial_\alpha J^\alpha = 0 \quad (3)$$

Hvordan transformerer disse likningene ved Lorentz-transformasjoner?

- c) Vis at likning 2 er en konsekvens av likninga for potensialet (likning 1), og at likning 3 følger av likning 2.

Vedlegg 1: En del formler som kanskje er nyttige:

Integraler:

$$\int \frac{u \, du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{2} \ln(a^2 + u^2) + \text{Konstant}$$

$$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{u}{a}\right) + \text{Konstant}$$

$$\int_0^\infty (u^2 + a)^{-3/2} du = \frac{1}{a}$$

$$\int_0^{2\pi} e^{ix \cos \phi} \cos \phi \, d\phi = i2\pi J_1(x)$$

Løsning av Laplace's likning i kulekoordinater:

$$X(\rho, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left[A_{lm} \rho^l + B_{lm} \rho^{-(l+1)} \right] P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}$$

Potensialproblem med Neumann randbetingelser:

$$\Phi(\vec{x}) - \langle \Phi \rangle_S = \int_V G_N(\vec{x}, \vec{x}') \frac{\rho(\vec{x}')}{\epsilon} d^3x' + \int_S G_N(\vec{x}, \vec{x}') \nabla_{x'} \Phi(\vec{x}') \cdot d\vec{S}$$

Potensialproblem med Dirichlet randbetingelser:

$$\Phi(\vec{x}) = \int_V G_D(\vec{x}, \vec{x}') \frac{\rho(\vec{x}')}{\epsilon} d^3x' - \int_S \Phi(\vec{x}') \nabla_{x'} G_D(\vec{x}, \vec{x}') \cdot d\vec{S}$$

Fouriertransformasjonen:

$$F(\vec{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int F(\vec{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

$$F(\vec{x}, \omega) = \int F(\vec{x}, t) e^{i\omega t} dt$$

Volumelement i ulike koordinatsystemer:

Kartesiske:	$dV = dx \, dy \, dz$
Sylinderkoordinater:	$dV = \rho \, d\rho \, d\phi \, dz$
Polarkoordinater:	$dV = \rho^2 \sin \theta \, d\rho \, d\theta \, d\phi$